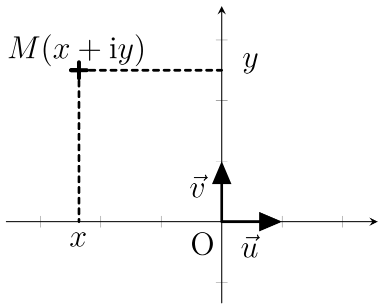
♦ Chapitre 5. – Nombres complexes : aspects géométriques

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

I. — Le plan complexe

Définition 1

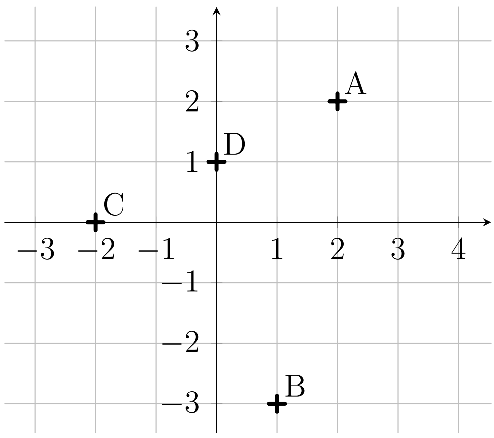
Soit M un point du plan de coordonnées cartésiennes $(x\,;y)$. On dit que le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ est l'affixe du point M et on le note z_M.
Inversement, si $z = x + \mathrm{i}y$ est un complexe écrit sous forme algébrique, on dit que le point M de coordonnées $(x\,;y)$ est l'image de z dans le plan et on note alors $M(z)$.



Remarque 2. À tout point M du plan, on peut associer une et une seule affixe z_M et, réciproquement, à tout complexe z, on peut associer une et une seule image M dans le plan. Autrement dit, un point du plan est entièrement déterminé par son affixe. Une fois que cette correspondance biunivoque a été établie, le plan est appelé plan complexe ou plan d'Argand-Cauchy.

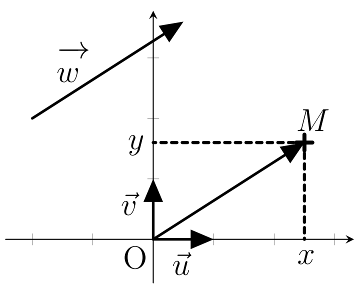
L'axe des abscisses est alors appelé l'axe réel et l'axe des ordonnées est appelé l'axe des imaginaires (purs).

Exemple 3. Sur le graphique ci-dessous, lire les affixes des points A, B, C et D et placer les points $\mathrm{E}(3+\mathrm{i})$, $\mathrm{F}(-1+2\mathrm{i})$, $\mathrm{G}(-2\mathrm{i})$ et $\mathrm{H}(3)$.



Définition 4

Soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur du plan. On note M l'unique point du plan tel que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{\mathrm{O}M}$. Alors, par définition, l'affixe de $\overrightarrow{w}$ est l'affixe du point M. On la note $z_{\overrightarrow{w}}$.



Propriété 5

Soit k un réel et $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ deux vecteurs du plan.

1. Les coordonnées de $\vec{w}$ sont $(x\,;y)$ si et seulement si $z_{\overrightarrow{w}} = x + \mathrm{i}y$.
2. $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{w'}$ si et seulement si $z_{\overrightarrow{w}} = z_{\overrightarrow{w'}}$. En particulier, un vecteur est nul si et seulement si son affixe est 0.
3. L'affixe de $\overrightarrow{w} + \overrightarrow{w'}$ est $z_{\overrightarrow{w}} + z_{\overrightarrow{w'}}$ i.e. $z_{\overrightarrow{w}+\overrightarrow{w'}} = z_{\overrightarrow{w}} + z_{\overrightarrow{w'}}$.
4. L'affixe de $k\overrightarrow{w}$ est $kz_{\overrightarrow{w}}$ i.e. $z_{k\overrightarrow{w}} = kz_{\overrightarrow{w}}$.

Exercice 6. Démontrer que deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ sont colinéaires si et seulement si $\dfrac{z_{\overrightarrow{w}}}{z_{\overrightarrow{w'}}}$ est un réel.

Propriété 7

Soit A et B deux points du plan.

1. L'affixe de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est $z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}$ i.e. $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}$.
2. L'affixe du milieu I de [AB] est $\frac{z_{\mathrm{A}}+z_{\mathrm{B}}}{2}$.

Exemple 8. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 1 + \mathrm{i}$, $z_{\mathrm{B}} = 2 - \mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{C}} = -3 + 4\mathrm{i}$.

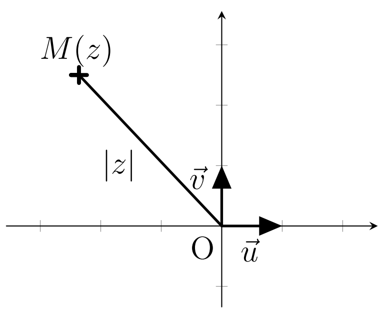
1. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $2\overrightarrow{\mathrm{AB}} - 3\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
2. Déterminer, de deux façons différentes, l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

II. — Module et arguments d'un nombre complexe

1) Module d'un nombre complexe

Définition 9

Soit z un nombre complexe et M le point du plan d'affixe z. On appelle module de z, noté $|z|$, la longueur OM.
Ainsi, par définition, $|z| = \mathrm{O}M$.



Remarque 10.

1. Par définition, le module d'un nombre complexe est un réel positif ou nul et $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.
2. Si z est réel alors le module du complexe z coïncide avec la valeur absolue du réel z.

Exemple 11 (à connaître)**.** Si z est un réel positif alors $|z| = z$, si z est un réel négatif alors $|z| = -z$, si z est un imaginaire pur tel que $\mathrm{Im}(z) \geqslant 0$ alors $|z| = \mathrm{Im}(z)$ et si z est un imaginaire pur tel que $\mathrm{Im}(z) \leqslant 0$ alors $|z| = -\mathrm{Im}(z)$.

Propriété 12

Soit z un nombre complexe. Alors, $|-z| = |z|$ et $|\bar{z}| = |z|$.

Propriété 13

Soit $z = a + \mathrm{i}\, b$ un nombre complexe écrit sous forme algébrique. Alors, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemple 14. Calculer le module des complexes $z_1 = 1 + \mathrm{i}$, $z_2 = -2 - 5\,\mathrm{i}$, $z_3 = \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Propriété 15

Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives z_{A} et z_{B}. Alors, $\mathrm{AB} = |z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}|$.

Exemple 16. Soit A, B et C les points d'affixes respectives $a = 1$, $b = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $c = -\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Déterminer la nature du triangle ABC.

Propriété 17

Pour tout nombre complexe z, $|z|^2 = z\bar{z}$.

Corollaire 18

Soit z et z' deux nombres complexes.

1. $|zz'| = |z|\,|z'|$.
2. Pour tout entier naturel n, $|z^n| = |z|^n$ (avec la convention $z^0 = 1$).
3. Si $z \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.
4. si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

Notation 19. L'ensemble des nombres de complexes de module 1 se note $\mathbb{U}$.

Exemple 20. $1 \in \mathbb{U}$, $\mathrm{i} \in \mathbb{U}$ et on a vu précédemment que $\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{U}$.

Exercice 21. Soit z un nombre complexe différent de 2. Montrer que $\dfrac{2 - \overline{z}}{z - 2} \in \mathbb{U}$.

Propriété 22

Un point $M(z)$ appartient au cercle trigonométrique si et seulement si $z \in \mathbb{U}$.

Propriété 23

L'ensemble $\mathbb{U}$ est stable par produit, inverse et quotient i.e. pour tout $(z\,;z') \in \mathbb{U}^2$, $zz' \in \mathbb{U}$, $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$ et $\dfrac{z}{z'} \in \mathbb{U}$.

Propriété 24. — inégalité triangulaire

Soit z et z' deux nombres complexes. Alors,

$$|z+z'| \leqslant |z| + |z'|\,.$$

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement s'il existe un réel $k \geqslant 0$ tels que $z' = kz$ ou $z = kz'$ (on dit alors que z et z' sont positivement liés.)

Exercice 25. On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = 9\,\mathrm{i}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{3}$. On note de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_n le point d'affixe z_n.

1. Calculer z_1 et z_2.

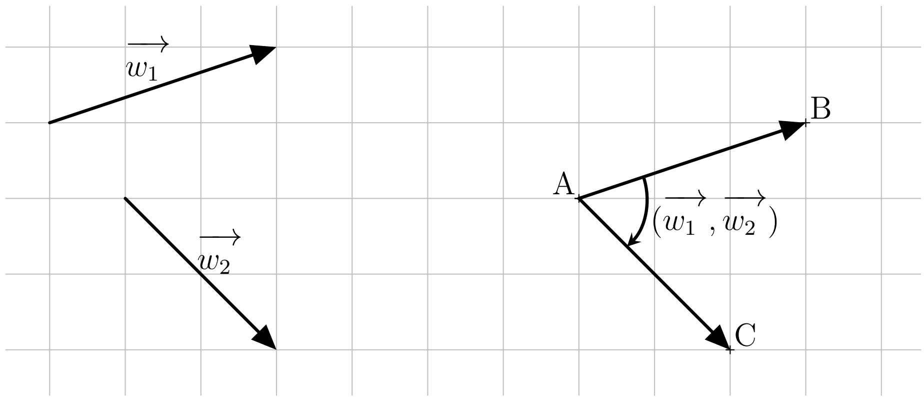
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $OM_n \leqslant 9\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

3. En déduire la limite de la distance $\mathrm{O}M_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2) Arguments d'un nombre complexe non nul

a) Angle orienté formé par deux vecteurs

Si $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ sont deux vecteurs non nuls, on note $(\overrightarrow{w_1}\,,\overrightarrow{w_2})$ « l'angle orienté formé par $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ ». Plus précisément, si A, B et C sont trois points tels que $\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ alors $(\overrightarrow{w_1}\,,\overrightarrow{w_2})$ correspond à l'angle géométrique $\widehat{\mathrm{BAC}}$ auquel on ajoute l'orientation du vecteur $\overrightarrow{w_1}$ vers le vecteur $\overrightarrow{w_2}$.



On munit le plan d'une orientation en décidant que le sens direct (ou sens trigonométrique) est le sens contraire des aiguilles d'une montre et le sens indirect (ou sens rétrograde) est le sens des aiguilles d'une montre.

Définition 26

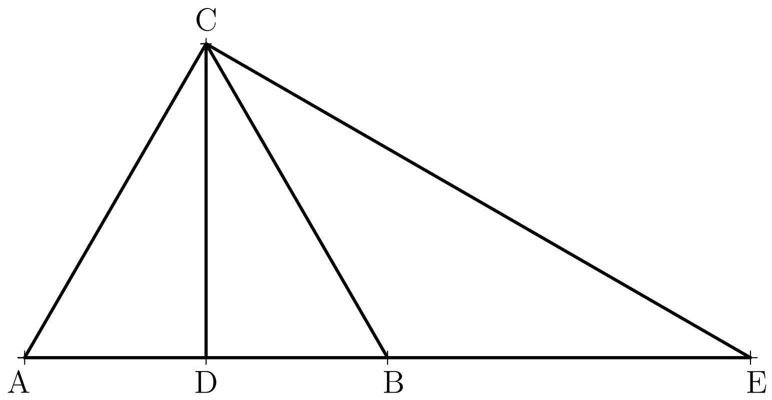
Soit $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ deux vecteurs non nuls. Avec les notations précédentes, une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}\right)$ est :

- une mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ si l'angle est orienté dans le sens direct ;
- l'opposé d'une mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ si l'angle est orienté dans le sens indirect.

Remarque 27.

1. Cette définition ne dépend pas des points A, B et C choisis.
2. Une mesure d'un angle orienté n'est définie qu'à un multiple de 2π près. Autrement dit, deux mesures d'un même angle sont égales modulo 2π.
3. Dans la pratique, on confond un angle et ses mesures. Ainsi, on écrira $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ pour dire qu'une mesure de $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})$ est $\frac{\pi}{3}$.

Exemple 28. Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle équilatéral direct, B est le milieu de [AE] et D est le milieu de [AB].
Déterminer des mesures des angles orientés $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$, $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$, $(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{BC})$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE})$, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CE})$ et $(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EC})$.



Propriété 29

Soit $\overrightarrow{w_1}$, $\overrightarrow{w_2}$ et $\overrightarrow{w_3}$ des vecteurs non nuls et k un réel non nul.

1. $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) + (\overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}) = (\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_3})\ [2\pi]$ (Relation de Chasles).
2. $(\overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_1}) = -(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})\ [2\pi]$.
3. $(k\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) = (\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})\ [2\pi]$ si $k > 0$ et $(k\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) = (\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) + \pi\ [2\pi]$ si $k < 0$.
   En particulier, $(-\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) = (\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) + \pi\ [2\pi]$

Remarque 30. Si $k < 0$, on a aussi $(k\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) = (\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) - \pi\ [2\pi]$ car $\pi = -\pi\ [2\pi]$.

Définition 31

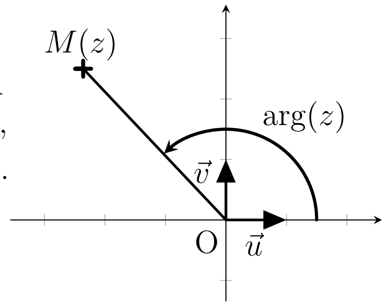
On dit qu'un repère orthonormé $(O\,; \vec{u}, \vec{v})$ est direct si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Dans toute la suite, on suppose que le repère $(O\,; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct.

b) Arguments d'un nombre complexe non nul

Définition 32

Soit z un nombre complexe <u>non nul</u> et M le point du plan d'affixe z. On appelle argument de z, noté $\arg(z)$, toute mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$. Ainsi, par définition, $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \arg(z)\ [2\pi]$.



Remarque 33.

1. Le nombre complexe 0 n'a pas d'argument.
2. Si $z \neq 0$ alors z a une infinité d'arguments qui diffèrent tout d'un multiple de 2π.

Exemple 34 (à connaître)**.** Si z est un réel strictement positif alors $\arg(z) = 0\ [2\pi]$, si z est un réel strictement négatif alors $\arg(z) = \pi\ [2\pi]$, si z est un imaginaire pur tel que $\mathrm{Im}(z) > 0$ alors $\arg(z) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et si z est un imaginaire pur tel que $\mathrm{Im}(z) < 0$ alors $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Propriété 35

Soit z un complexe non nul. Alors,

1. $\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]$;
2. $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$.

Propriété 36

Soit A et B deux points distincts du plan d'affixes respectives z_{A} et z_{B}. Alors,

$$(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}) = \arg(z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}})\ [2\pi].$$

III. — Formes trigonométriques d'un nombre complexe

1) Définition

Propriété 37

Soit $z = a + \mathrm{i}\,b$ un nombre complexe non nul écrit sous forme algébrique. On note r la module de z et θ un argument de z. Alors, $a = r\cos(\theta)$ et $b = r\sin(\theta)$.

Propriété et définition 38

Soit z un complexe non nul. Alors, en notant r le module de z et θ un argument de z, on a $z = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$.

Cette écriture est appelée une forme trigonométrique du complexe z.

Remarque 39. Un complexe non nul admet une infinité de formes trigonométriques différentes.

Propriété 40

Soit r, r', θ et θ' des réels tels que $r > 0$ et $r' > 0$. Alors,

$$r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)) = r'(\cos(\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta')) \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' \ [2\pi] \end{cases}.$$

Corollaire 41

Si un complexe non nul z s'écrit $z = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$ avec $r > 0$ alors $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)\ [2\pi]$.

Méthode 42.

1. Si on connait une forme trigonométrique $z = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$ d'un complexe non nul, pour déterminer sa forme algébrique $z = a + \mathrm{i}\,b$, il suffit d'écrire que $a = r\cos(\theta)$ et $b = r\sin(\theta)$.
2. Si on connaît la forme algébrique de $z = a + \mathrm{i}\,b$ d'un complexe non nul, pour déterminer sa forme trigonométrique, on écrit que $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ puis on factorise dans z le nombre r afin de faire apparaître les cosinus et sinus d'un angle.

Exemple 43. Déterminer une forme trigonométrique des complexes suivants

$$z_1 = 1 \qquad z_2 = \mathrm{i} \qquad z_3 = 1 - \mathrm{i} \qquad z_4 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Exemple 44. Déterminer le module et un argument des complexes suivants

$$z_1 = 3\left(\cos(3) + \mathrm{i}\sin(3)\right) \qquad z_2 = -5\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)$$

$$z_3 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \qquad z_4 = 2(-\cos(3) + \mathrm{i}\sin(3)).$$

2) Forme exponentielle

Propriété 45. — Formules d'addition et de duplication

Pour tous réels a et b,

1. $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$;
2. $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$;
3. $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$;
4. $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$;
5. $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$;
6. $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$.

Lemme 46

Pour tout réel θ, on pose $f(\theta) = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$. Alors, pour tous réels θ et θ',

$$f(\theta + \theta') = f(\theta)f(\theta').$$

Ainsi, la fonction $f : \theta \mapsto \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$ vérifie la même relation fonctionnelle que la fonction exponentielle. On décide de noter $f(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$.

Définition 47

On définit l'exponentielle imaginaire d'un réel θ, notée $e^{i\theta}$, par

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Propriété et définition 48

Soit z un complexe non nul de module r et d'argument θ. Alors,

$$z = re^{i\theta}.$$

Cette écriture s'appelle une forme exponentielle de z.

Remarque 49. On déduit du corollaire 41 que si un complexe z s'écrit $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ alors $r = |z|$ et $\theta = \arg z\ [2\pi]$. Ainsi, on a l'équivalence, pour tout $r > 0$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$z = re^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} r = |z| \\ \theta = \arg z\ [2\pi] \end{cases}.$$

Exemple 50 (à connaître)**.** $1 = e^{i0} = e^{i2\pi}$, $i = e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{-i\frac{3\pi}{2}}$, $-1 = e^{i\pi} = e^{-i\pi}$, $-i = e^{i\frac{3\pi}{2}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

Propriété 51

Soit un complexe z. Alors, $z \in \mathbb{U}$ si et seulement s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. Autrement dit, $\mathbb{U} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.

3) Calculs sur les formes exponentielles et conséquences

Propriété 52

Soit r et r' deux réels strictement positifs et θ et θ' deux réels (quelconques). Alors,

1. $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$;
2. $-re^{i\theta} = re^{i(\theta+\pi)}$;
3. $re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$;
4. Pour tout entier naturel n, $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$;
5. $\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$.

Exemple 53. Déterminer la forme algébrique de $(1+i)^{2021}$.

Exemple 54. On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Montrer que $j^3 = 1$ puis que $j^2 + j + 1 = 0$.

Propriété 55

Soit z et z' deux complexes non nuls. Alors,

1. $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$;
2. pour tout entier naturel n, $\arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$;
3. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$.

Remarque 56.

1. On retrouve également grâce à la propriété précédente le corollaire 18.
2. Comme pour le module, il n'y a pas de relation entre $\arg(z+z')$ (resp. $\arg(z-z')$) et $\arg(z)$ et $\arg(z')$.

Exemple 57. Déterminer module et argument de $Z = \frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ et en déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Corollaire 58

Soit A, B, C et D des points du plan d'affixes respectives z_{A}, z_{B}, z_{C} et z_{D}. On suppose, de plus, que A $\neq$ B et C $\neq$ D. Alors,

$$(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{CD}}) = \arg\left(\frac{z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}}\right)\ [2\pi].$$

Exemple 59. Soit A, B et C les points d'affixes respectives $a = 1 - \mathrm{i}$, $b = 4 - 3\,\mathrm{i}$ et $c = 3 + 2\,\mathrm{i}$. Déterminer la nature précise du triangle ABC.

Propriété 60. — Formule de de Moivre

Pour tout réel θ et tout entier naturel n,

$$(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta).$$

Exemple 61. Retrouver les formules de duplication à l'aide de la formule de de Moivre.

Propriété 62. — Formules d'Euler

Pour tout réel θ,

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}}{2\,\mathrm{i}}.$$

Exemple 63. Soit $\theta \in \left]-\pi\,;\pi\right[$. Déterminer module et argument du nombre complexe

$$z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + 1}.$$

Exercice 64. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta).$$