# Suites et matrices — Corrigé

## Exercice 1

**1. a.** A l'aide de la calculatrice, on trouve $M^2 - 3M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ i.e. $\boxed{M^2 - 3M = 4I_3}$.

**b.** On en déduit que $M(M - 3I_3) = 4I_3$ et donc $M \times \frac{1}{4}(M - 3I_3) = I_3$. Ainsi, $M$ est inversible et $\boxed{M^{-1} = \frac{1}{4}(M - 3I_3)}$.

**c.** Remarquons que

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 6y - 9z = 4 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 6y - 9z = 4 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 2 \end{cases}.$$

L'écriture matricielle de ce dernier système équivalent à $(S)$ est $MX = B$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dès lors, comme $M$ est inversible, $(S)$ équivaut à $X = M^{-1}B = \frac{1}{4}(M - 3I_3)B$. A l'aide de la calculatrice, on en déduit que $(S)$ équivaut à $X = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\boxed{\text{l'unique solution de } (S) \text{ est } \left(-\frac{5}{2} \,;\, \frac{1}{2} \,;\, -\frac{3}{2}\right)}$.

**2. a.** Soit la proposition $P_n$ : « il existe deux réels $a_n$ et $b_n$ tels que $M^n = a_n M + b_n I_3$ » pour $n \in \mathbb{N}$.
Étant donné que $M^0 = I_3 = 0 \times M + 1 \times I_3$, $P_0$ est vraie en posant $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.
Supposons que, pour un certain $k \in \mathbb{N}$, il existe deux réels $a_k$ et $b_k$ tels que $M^k = a_k M + b_k I_3$.
Alors, en utilisant la question 1.a.,

$$\begin{aligned} M^{k+1} &= M^k \times M = (a_k M + b_k I_3)M = a_k M^2 + b_k M \\ &= a_k(3M + 4I_3) + b_k M = (3a_k + b_k)M + 4a_k I_3 \end{aligned}$$

donc $P_{k+1}$ est vraie en posant $a_{k+1} = 3a_k + b_k$ et $b_{k+1} = 4a_k$.
Ainsi, on a montré par récurrence qu'il existe deux suites de réels $(a_n)$ et $(b_n)$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = a_n M + b_n I_3$. De plus, ces deux suites sont définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 3a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 4a_n$.

**b.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_n + b_n \\ 4a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en posant $\boxed{A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

**3. a.** Le déterminant de $P$ est $\det P = 1 \times 4 - (-1) \times 1 = 5 \neq 0$ donc $P$ est inversible. De plus, $\boxed{P^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$.

**b.** À l'aide de la calculatrice, on trouve $\boxed{D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$.

**c.** Considérons la proposition $Q_n$ : « $A^n = PD^nP^{-1}$ » pour $n \in \mathbb{N}$.
Étant donné que $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_2 = A^0$, $Q_0$ est vraie.
Supposons que, pour un certain $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1}$.
Remarquons que, d'après 3.c, $D = P^{-1}AP$ donc $A = PDP^{-1}$. Dès lors,

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^kA = (PD^kP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^k(P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= PD^kI_2DP^{-1} = PD^kDP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, $Q_{k+1}$ est vraie et on a donc démontré par un raisonnement par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}}$.

**d.** Comme $D$ est diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ et donc

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \times 4^n & 4^n \\ -(-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4^{n+1} + (-1)^n & 4^n - (-1)^n \\ 4^{n+1} - 4 \times (-1)^n & 4^n + 4 \times (-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a vu que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$ donc la suite $(X_n)$ est une suite géométrique de matrices de raison $A$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$. Or, $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4^{n+1} + (-1)^n & 4^n - (-1)^n \\ 4^{n+1} - 4 \times (-1)^n & 4^n + 4 \times (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4^n - (-1)^n}{5} \\ \frac{4^n + 4 \times (-1)^n}{5} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{4^n - (-1)^n}{5} \text{ et } b_n = \frac{4^n + 4 \times (-1)^n}{5}}$.

**4. a.** On déduit des questions 2.a. et 4.a. que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = \frac{4^n - (-1)^n}{5}M + \frac{4^n + 4 \times (-1)^n}{5}I_3$ i.e.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 \times 4^n - (-1)^n & 6(4^n - (-1)^n) & -9(4^n - (-1)^n) \\ 2(4^n - (-1)^n) & 2 \times 4^n + 3 \times (-1)^n & -3(4^n - (-1)^n) \\ 2(4^n - (-1)^n) & 2(4^n - (-1)^n) & -3 \times 4^n + 8 \times (-1)^n \end{pmatrix}}.$$

**b.** Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Alors, $Z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et, d'après les relations de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = MZ_n$. On en déduit comme précédemment que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = M^n Z_0$ et donc, d'après la question 4.a.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 \times 4^n - (-1)^n \\ 2(4^n - (-1)^n) \\ 2(4^n - (-1)^n) \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{6 \times 4^n - (-1)^n}{5},\ v_n = w_n = \frac{2(4^n - (-1)^n)}{5}}.$$

**Exercice 2**
**Partie A**

**1.** On trouve $AX = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} = 7X$ donc $\boxed{7 \text{ est une valeur propre de } A}$ (étant donné que la matrice $X$ n'est pas nulle).

**2.** Soit $k$ une valeur propre non nulle de $A$ et soit $X$ une matrice associée à $k$.
On considère la proposition $P_n$ : « $A^n X = k^n X$ » pour $n \in \mathbb{N}$.
Comme $A^0 X = I_2 X = X = k^0 X$, la proposition $P_0$ est vraie.
Supposons que $P_m$ est vraie pour un certain $m \in \mathbb{N}$.
Alors, $A^{m+1}X = A^m(AX) = A^m(kX) = k(A^m X) = k(k^m X) = k^{m+1}X$ donc $P_{m+1}$ est vraie et on a donc démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n X = k^n X}$.

**3.** Par le cours (théorème 55), on sait qu'un système dont l'écriture matricielle est $MX = B$ admet une unique solution si et seulement si $M$ est inversible. Il s'ensuit qu'une équation du type $MX = B$ n'admet pas une unique solution $X$ si et seulement si $M$ n'est pas inversible. Or, un réel $k$ est valeur propre de $A$ si et seulement s'il existe une matrice non nulle $X$ telle que $AX = kX$ i.e. $AX - kX = 0$ ce qui équivaut à $(A - kI_2)X = O_{2,1}$. Posons $M = A - kI_2$. L'équation $MX = O_{2,1}$ admet toujours au moins une solution qui est la matrice nulle $O_{2,1}$. Ainsi, $k$ est valeur propre de $A$ si et seulement s'il existe au moins une autre matrice (non nulle donc) qui soit également solution de cette équation. D'après ce qui précède, ceci équivaut à dire que $M$ n'est pas inversible.
Ainsi, $\underline{k \text{ est une valeur propre de } A \text{ si et seulement si la matrice } A - kI_2 \text{ n'est pas inversible}}$.

**4.** **a.** Un réel $k$ est valeur propre de $A$ si et seulement la matrice $A - kI_2$ n'est pas inversible i.e. si et seulement si $\det(A - kI_2) = 0$. Or, $A - kI_2 = \begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{pmatrix}$ donc

$$\det(A - kI_2) = (a-k)(d-k) - bc = ad - ak - dk + k^2 - bc = k^2 - (a+d)k + ad - bc.$$

On conclut donc que qu'un réel $\underline{k \text{ est une valeur propre de } A \text{ si et seulement si } k \text{ est solution de l'équation } x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0}$.

**b.** Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ alors un réek $k$ est valeur propre de $A$ si et seulement si $k$ est solution de l'équation $x^2 - (-1-1)x + (-1) \times (-1) - 1 \times 2 = 0$ i.e. $x^2 + 2x - 1 = 0$.
Le discriminant de cette équation est $2^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8 > 0$ donc elle possède deux solutions réelles qui sont $x_1 = \dfrac{-2-\sqrt{8}}{2} = -1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = \dfrac{-2+\sqrt{8}}{2} = -1 + \sqrt{2}$.
On conclut que la matrice $\boxed{A \text{ admet deux valeurs propres qui sont } -1-\sqrt{2} \text{ et } -1+\sqrt{2}}$.

**c.** Considérons la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors, un réel $k$ est valeur propre de $B$ si et seulement si $k$ est solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$. Cette dernière équation n'ayant pas de solution réelle, $\boxed{B \text{ n'admet pas de valeur propre}}$.

## Partie B

**1.** Soit la proposition $Q_n$ : « $u_n \in \mathbb{Z}$ et $v_n \in \mathbb{Z}$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Par définition, $u_0 = p \in \mathbb{Z}$ et $v_0 = q \in \mathbb{Z}$ donc $Q_0$ est vraie.
Supposons que $Q_k$ soit vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.
Alors, par hypothèse, $u_k \in \mathbb{Z}$ et $v_k \in \mathbb{Z}$. On en déduit que $(-u_k + 2v_k) \in \mathbb{Z}$ et $(u_k - v_k) \in \mathbb{Z}$ i.e. $u_{k+1} \in \mathbb{Z}$ et $v_{k+1} \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $Q_{k+1}$ est vraie et on a donc démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{Z} \text{ et } v_n \in \mathbb{Z}}$.

**2. a.** On trouve $AX_0 = \begin{pmatrix} -p + 2q \\ p - q \end{pmatrix}$. Or, on a vu dans la **partie A** que les valeurs propres de $A$ sont $-1-\sqrt{2}$ et $-1+\sqrt{2}$. Si on calcule $(-1+\sqrt{2})X_0$, on trouve $\begin{pmatrix} -p + p\sqrt{2} \\ -q + q\sqrt{2} \end{pmatrix}$.
Or, par hypothèse, $q\sqrt{2} = p$ et donc $p\sqrt{2} = q(\sqrt{2})^2 = 2q$ donc $\begin{pmatrix} -p + p\sqrt{2} \\ -q + q\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p + 2q \\ -q + p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p + 2q \\ p - q \end{pmatrix}$ i.e. $AX_0 = (-1+\sqrt{2})X_0$. On conclut donc que $\underline{X_0 \text{ est une matrice associée à la valeur propre } -1+\sqrt{2} \text{ de } A}$.

**b.** On déduit de la question **2.** de la **partie A** que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0 = (-1+\sqrt{2})^n X_0$ i.e. $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1+\sqrt{2})^n p \\ (-1+\sqrt{2})^n p \end{pmatrix}$. Dès lors, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1+\sqrt{2})^n p}$.

**c.** Etant donné que $1 < \sqrt{2} < 2$, $(-1+\sqrt{2}) \in \left]-1\,;1\right[$ donc $\lim (-1+\sqrt{2})^n = 0$. Par suite, $\lim u_n = 0$ et donc, par définition, $\underline{\text{il existe un certain rang } N \in \mathbb{N} \text{ tel que } -1 < u_N < 1}$.
Etant donné que $u_N$ est un entier (d'après la question **1.**), on en déduit que $u_N = 0$. Or, $u_N = (-1+\sqrt{2})^N p$ et $(-1+\sqrt{2})^N \neq 0$ car $(-1+\sqrt{2}) \neq 0$. On en déduit donc que $\boxed{p = 0}$.

**3.** Ceci conduit donc à une absurdité puisqu'on aboutit à $\sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{0}{q} = 0$. Ainsi, les entiers $p$ et $q$ n'existent pas et $\boxed{\sqrt{2} \text{ est irrationnel}}$.