

Nombres premiers

Exercice 1. On donne la liste des nombres premiers de inférieurs à 50 :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 et 47.

Partie A. — Soit a un entier supérieur ou égal à 2 et $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit b un entier relatif non nul b tel que $b < a$. Montrer que $a^n \equiv b^n \pmod{a-b}$.
2. Dédurre de la question 1. que $a-1$ divise a^n-1 .
3. On suppose que n est impair. Dédurre de la question 1. que $a+1$ divise a^n+1 .

Partie B

1. Soit a et n deux entiers supérieurs ou égaux à 2. Dédurre de la question 2. de la **partie A** que si a^n-1 est premier alors $a=2$.

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $M_n = 2^n - 1$.

2. Compléter (directement sur l'énoncé) le tableau suivant, qui donne quelques valeurs de M_n :

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M_n	3								

3. On considère l'implication (P) suivante :

(P) : « Pour tout entier $n \geq 2$, si n est un nombre premier alors le nombre M_n est premier »

D'après le tableau précédent, peut-on conjecturer que l'implication (P) est vraie ? (Justifier en détails.)

4. a. Le nombre M_{11} est-il premier ?
b. Que peut-on en conclure concernant (P) ?
5. On s'intéresse maintenant à l'implication réciproque de (P) qu'on notera (Q).
a. Énoncer l'implication (Q) puis la contraposée de (Q).
b. Soit p et q deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2. Dédurre de la question 2. de la **partie A** que M_p divise M_{pq} .
c. En déduire que si un entier n supérieur ou égal à 2 n'est pas premier, alors M_n ne l'est pas non plus.
d. L'implication (Q) est-elle vraie ?

Partie C

1. Soit a et n deux entiers supérieurs ou égaux à 2 .
a. Montrer que si a est impair alors a^n+1 n'est pas premier.
b. On suppose que n admet un diviseur premier p impair. Dédurre de la question 3. de la **partie A** que a^n+1 n'est pas premier. (On pourra s'inspirer de la question 5. de la **partie B**.)

2. Donner un exemple de nombre premier de la forme $a^n + 1$ où a et n sont des entiers supérieurs ou égaux à 2 tels que a admette un diviseur premier impair.
3. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$.
 - a. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $F_{n+1} - 2 = F_n(F_n - 2)$.
 - b. Existe-t-il un entier $n \geq 2$ tel que F_n soit la somme de deux nombres premiers?

Exercice 2. — On note $\mathcal{A}_1$ l'ensemble des nombres de la forme $4k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{A}_3$ l'ensemble des nombres de la forme $4k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

1. Donner, sans justification, les 3 plus petits éléments de $\mathcal{A}_1$ qui sont premiers et les 3 plus petits éléments de $\mathcal{A}_3$ qui sont premiers.
2. Montrer que tout nombre premier $p \neq 2$ appartient soit à $\mathcal{A}_1$ soit à $\mathcal{A}_3$. On pourra raisonner selon la valeur du reste de p modulo 4.
3. Montrer qu'il existe une infinité d'éléments de $\mathcal{A}_3$ qui ne sont pas premiers.
4. On souhaite montrer qu'il existe une infinité d'éléments de $\mathcal{A}_3$ qui sont premiers. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il n'existe qu'un nombre fini n de nombres premiers dans $\mathcal{A}_3$. On note ces nombres $p_1, p_2, \dots, p_n$.
 - a. Montrer que si un entier N s'écrit comme un produit de nombres premiers appartenant tous à $\mathcal{A}_1$ alors N appartient à $\mathcal{A}_1$.
 - b. Aboutir à une contradiction en considérant le nombre $N = 4p_1p_2 \cdots p_n - 1$ et conclure.