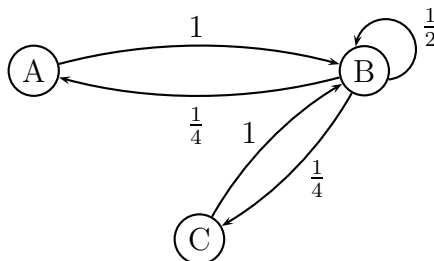


Correction du devoir surveillé n°6

1. a. On peut représenter cette marche aléatoire par le graphe suivant :



- b. La matrice de transition associée à ce graphe est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Initialement, il y a 2 boules blanches dans l'urne U donc $(X_0 = 2)$ est un évènement certain et ainsi $R_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Par théorème, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = R_0 M^n$ donc $R_5 = R_0 M^5 = \begin{pmatrix} \frac{5}{32} & \frac{11}{16} & \frac{5}{32} \end{pmatrix}$. On en déduit que la probabilité que l'urne U contiennent 2 boules blanches après le cinquième tirage est $\frac{5}{32}$.

3. a. Soit la proposition $H_n : \ll M^n = P \times D^n \times P^{-1} \gg$.

Comme $M^0 = I_3$ et $P D^0 P^{-1} = P P^{-1} = I_3$, H_0 est vraie.

Supposons que, pour un certain $k \in \mathbb{N}$, H_k soit vraie.

Alors,

$$M^{k+1} = M M^k = (P D P^{-1})(P D^k P^{-1}) = P D (P^{-1} P) D^k P^{-1} = P D D^k P^{-1} = P D^{k+1} P^{-1}$$

donc H_{k+1} est vraie.

On a ainsi démontré par récurrence que, $\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, M^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

- b. D'une part, $D^0 = I_3$ donc $D^0 P^{-1} = P^{-1}$. D'autre part, si $n \in \mathbb{N}^*$, comme D est

diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc

$$D^n \times P^{-1} = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

- c. La matrice $R_0 P$ est la troisième ligne de P donc $R_0 P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$R_n = R_0(PD^nP^{-1}) = (R_0P)(D^nP^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } R_n = \begin{pmatrix} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{3} + \frac{1}{6} & \frac{-2\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{3} + \frac{2}{3} & \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{3} + \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{P(X_n = 0) = P(X_n = 2) = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{3} + \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad P(X_n = 1) = \frac{-2\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{3} + \frac{2}{3}.$$

De plus, $R_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d. Étant donné que $-1 < -\frac{1}{2} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 2) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 1) = \frac{2}{3}.$$

4. On vérifie à l'aide de la calculatrice que M^2 ne contient pas de 0 donc la marche aléatoire admet un unique état stable R et la suite (R_n) converge vers R . Or, à l'aide de la calculatrice, on vérifie que $R_{99} = R_0M^{99} \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$. On peut donc conjecturer que l'état stable est $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$. Or, on vérifie par le calcul que cet état probabiliste satisfait l'égalité $TM = T$ donc il s'agit bien de l'état stable. Ainsi, $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$. Comme (R_n) converge vers R , on retrouve que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 2) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 1) = \frac{2}{3}.$$