

## Devoir surveillé n°6

Durée : 1 heure

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. Tout document est interdit.

On dispose de deux urnes U et V contenant chacune deux boules. Au départ, l'urne U contient deux boules blanches et l'urne V contient deux boules noires.

On effectue des tirages successifs dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à prendre au hasard, de manière simultanée, une boule dans chaque urne et à la mettre dans l'autre urne. Par exemple, au premier tirage, on tire nécessairement une boule blanche dans l'urne U et une boule noire dans l'urne V puis on place la boule blanche dans l'urne V et la boule noire dans l'urne U donc, à l'issue du premier tirage, les deux urnes contiennent chacune une boule blanche et une boule noire.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $X_n$  la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient l'urne U à la fin du  $n$ -ième tirage.

1. a. Représenter cette marche aléatoire par un graphe à trois états :  
 A : « L'urne U contient deux boules noires »  
 B : « L'urne U contient deux boules de couleurs différentes »  
 C : « L'urne U contient deux boules blanches »  
 b. Déterminer la matrice de transition  $M$  associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.
2. Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $R_n$  la matrice ligne définie par :

$$R_n = \left( P(X_n = 0) \quad P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2) \right)$$

Justifier que  $R_0 = (0 \quad 0 \quad 1)$  puis déterminer la probabilité que l'urne U contienne 2 boules blanches après le cinquième tirage. (On donnera la valeur exacte sous forme d'une fraction irréductible.)

3. On admet que  $M = P \times D \times P^{-1}$  avec :

$$P = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$ .
- b. Calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $D^n \times P^{-1}$  en fonction de  $n$ .
- c. Calculer  $R_0 P$  et en déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les coefficients de  $R_n$  en fonction de  $n$ .
- d. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 0)$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 1)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 2)$ .
4. Sans utiliser les résultats de la question 3, justifier que la marche aléatoire admet un unique état stable et le déterminer.  
 Quels résultats retrouve-t-on ainsi ? (Justifier.)