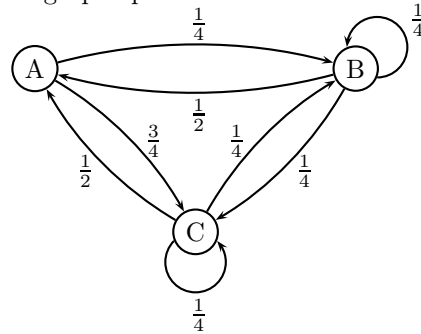


Correction du devoir surveillé donné en 2015

1. On peut représenter la situation par le graphe probabiliste suivant :



2. La matrice de transition associée à ce graphe est $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.
3. Par théorème, pour tout entier naturel n , $P_{n+1} = P_n M$. Ainsi, (P_n) est une suite géométrique de matrices lignes donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = P_0 M^n$.
4. En particulier, $P_5 = P_0 M^5$ avec $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. À l'aide de la calculatrice, on obtient $P_5 = \begin{pmatrix} \frac{5}{16} & \frac{1}{4} & \frac{7}{16} \end{pmatrix}$. Ainsi, la probabilité qu'après la cinquième navigation l'internaute se retrouve à nouveau sur la page n° 1 est $a_5 = \frac{5}{16}$.
5. On vérifie à la calculatrice que la matrice M^2 ne contient pas de 0 donc, par théorème, le système admet un unique état stable P et de plus (P_n) converge vers P . L'état P est une matrice ligne $P = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ telle que $P = PM$ et $a + b + c = 1$. Ainsi, $(a; b; c)$ est solution du système

$$(S) \begin{cases} a = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \\ b = \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c \\ c = \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c = 0 & L_1 \\ -\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b - \frac{1}{4}c = 0 & L_2 \\ -\frac{3}{4}a - \frac{1}{4}b + \frac{3}{4}c = 0 & L_3 \\ a + b + c = 1 & L_4 \end{cases}$$

Or, on constate que $L_3 = -L_1 - L_2$ donc

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c = 0 \\ -\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b - \frac{1}{4}c = 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$$

L'écriture matricielle de ce dernier système est $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ On vérifie à la calculatrice que } A \text{ est inversible donc } AX = B \text{ équivaut à } X = A^{-1}B \text{ i.e.}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} \end{pmatrix}. \text{ Ainsi, l'état stable est } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}.$$

On a déjà justifié que les coefficients sont les limites des coefficients de P_n . Ainsi, au bout d'un grand nombre de navigation, la probabilité que l'internaute soit sur la page 1 est proche de $\frac{1}{3}$, la probabilité qu'il soit sur la page 2 est proche de $\frac{1}{4}$ et la probabilité qu'il soit sur la page 3 est proche de $\frac{5}{12}$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P_n = P_0 M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad b_n = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad c_n = \frac{5}{12} + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

7. En particulier, $a_5 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{16}$ donc on retrouve le résultat de la question 4.

De plus, comme $-1 < -\frac{1}{2} < 1$, $\lim \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim a_n = \frac{1}{3}$, $\lim b_n = \frac{1}{4}$ et $\lim c_n = \frac{5}{12}$ et on retrouve ainsi les résultats de la question 5.