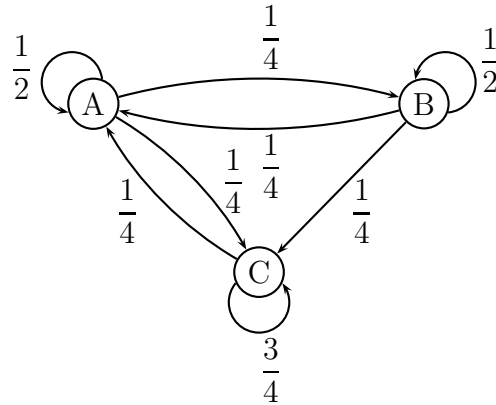


Correction du devoir surveillé n°5

1. On peut représenter la situation par le graphe probabiliste suivant :



2. La matrice de transition associée à ce graphe est $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

3. Notons A_i l'évènement : « l'internaute est sur la page A après i minutes ». Alors, on cherche la probabilité de $E := A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$. Or, comme l'état à un instant i ne dépend que de l'état à l'instant $i - 1$,

$$P(E) = P(A_0) \times P_{A_0}(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_2}(A_3) \times P_{A_3}(A_4) \times P_{A_4}(A_5) = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

donc $\boxed{P(E) = \frac{1}{32}}$.

4. Par théorème, $P_5 = P_0 M^5$ avec $P_0 = (1 \ 0 \ 0)$. A l'aide de la calculatrice, on obtient $P_5 = \left(\frac{171}{512} \ \frac{93}{512} \ \frac{31}{64}\right)$. Ainsi, la probabilité qu'après 5 minutes de navigation l'internaute

se trouve sur le site C est $\boxed{c_5 = \frac{31}{64}}$.

5. L'algorithme peut se compléter ainsi.

Entrée	Saisir N
Traitement	a prend la valeur 1 b prend la valeur 0 c prend la valeur 0 Pour i allant de 1 à N d prend la valeur a a prend la valeur $\frac{1}{2}d + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c$ b prend la valeur $\frac{1}{4}d + \frac{1}{2}b$ c prend la valeur $1 - a - b$ Fin Pour
Sortie	Afficher a, b et c

6. On vérifie à la calculatrice que la matrice M^2 ne contient pas de 0 donc, par théorème, le système admet un unique état stable P et de plus (P_n) converge vers P .

En calculant P_{99} à l'aide de la calculatrice, on constate que $P_{99} \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. On conjecture que l'état stable du système est $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (qui est bien un état probabiliste).

Or, on vérifie par le calcul que $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donc cet état est bien stable. Par unicité, on en déduit que $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

On a déjà justifié que les coefficients sont les limites des coefficients de P_n . Ainsi, au bout d'un grand nombre de minutes, la probabilité que l'internaute soit sur le site A est proche de $\frac{1}{3}$, la probabilité qu'il soit sur le site B est proche de $\frac{1}{6}$ et la probabilité qu'il soit sur le site C est proche de $\frac{1}{2}$.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
P_n = P_0 M^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{4^{n-1}} & 1 + \frac{3}{2^n} - \frac{1}{4^{n-1}} & 3 - \frac{3}{2^n} \\ 2 - \frac{2}{4^n} & 1 + \frac{3}{2^n} + \frac{2}{4^n} & 3 - \frac{3}{2^n} \\ 2 - \frac{2}{4^n} & 1 - \frac{3}{2^n} + \frac{2}{4^n} & 3 + \frac{3}{2^n} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{4^{n-1}} & 1 + \frac{3}{2^n} - \frac{1}{4^{n-1}} & 3 - \frac{3}{2^n} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{1}{6} \left(2 + \frac{1}{4^{n-1}} \right), \quad b_n = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{3}{2^n} - \frac{1}{4^{n-1}} \right) \quad \text{et} \quad c_n = \frac{1}{6} \left(3 - \frac{3}{2^n} \right)$$

8. La question revient à se demander s'il existe un entier n tel que $c_n \geq \left(1 + \frac{50}{100} \right) a_n$ i.e.

$c_n \geq \frac{3}{2}a_n$. Or, quel que soit l'entier n , comme $\frac{3}{2^n} > 0$ et $\frac{1}{4^{n-1}} > 0$,

$$\frac{3}{2}a_n = \frac{3}{2} \left[\frac{1}{6} \left(3 - \frac{3}{2^n} \right) \right] = \frac{1}{6} \left(2 - \frac{9}{2^{n+1}} \right) < \frac{1}{6} \times 2 < \frac{1}{6} \left(2 + \frac{1}{4^{n-1}} \right) = a_n.$$

Ainsi, il n'existe pas d'entier n tel que c_n dépasse a_n d'au moins 50%.

Exercice 2

- Notons, pour tout $(i; j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, m_{ij} le coefficient de M d'indices i et j . Comme M est stochastique en ligne, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n m_{ij} = 1$. Considérons la matrice colonne X de taille $n \times 1$ dont tous les coefficients sont des 1 et posons $Y := MX$. Alors, par définition, le coefficient d'indices i 1 de Y est

$$y_{i,1} := \sum_{j=1}^n m_{ij} \times 1 = \sum_{j=1}^n m_{ij} = 1$$

donc $Y = X$ i.e. $MX = 1 \times X$. Comme X n'est pas nul, on en déduit que 1 est valeur propre de M .

- Supposons que λ est une valeur propre de M . Il existe donc une matrice colonne non nulle X de taille $n \times 1$ telle que $MX = \lambda X$. Notons, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, x_i le coefficient d'indices i et 1 de X . Notons k un indice tel que x_k soit maximum en valeur absolue parmi les x_i (cet indice n'est pas forcément unique). Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|x_i| \leq |x_k|$. Remarquons que $|x_k| \neq 0$ sinon $X = 0$. En utilisant les mêmes notations que dans la question 1, on a, grâce à l'inégalité triangulaire,

$$|y_k| = \left| \sum_{j=1}^n m_{kj} \times x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |m_{kj} x_j| = \sum_{j=1}^n |m_{kj}| |x_j|.$$

Or, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|x_j| \leq |x_k|$ donc $|m_{kj}| |x_j| \leq |m_{kj}| |x_k| = m_{kj} |x_k|$ car $m_{kj} \geq 0$, et ainsi

$$|y_k| \leq \sum_{j=1}^n m_{kj} |x_k| = |x_k| \sum_{j=1}^n m_{kj} = |x_k|$$

puisque M est stochastique en ligne donc $\sum_{j=1}^n m_{kj} = 1$.

Mais, par ailleurs, comme $MX = \lambda X$, $y_k = \lambda x_k$ donc $|\lambda x_k| \leq |x_k|$. Dès lors, $|\lambda| |x_k| \leq |x_k|$ et, comme $|x_k| \neq 0$, on conclut que $|\lambda| \leq 1$.