

NOM : Prénom :

Terminales S1&2 – spécialité mathématiques

lundi 09 mai 2016

Devoir surveillé n°5

Durée : 1 heure

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. Tout document est interdit.

Exercice 1. — Trois sites internet A, B, C ont des liens entre eux. Un internaute connecté sur un de ces trois sites peut à chaque minute soit y rester soit utiliser un lien vers l'un des deux autres sites. Un étude statistique a montré que :

- si un internaute est connecté sur le site A, la probabilité qu'il utilise le lien vers le site B est $\frac{1}{4}$ et celle qu'il utilise le lien vers le site C est $\frac{1}{4}$.
- si un internaute est connecté sur le site B, la probabilité qu'il utilise le lien vers le site A est $\frac{1}{4}$ et celle qu'il utilise le lien vers le site C est $\frac{1}{4}$.
- si un internaute est connecté sur le site C, la probabilité qu'il utilise le lien vers le site A est $\frac{1}{4}$ mais il n'y a pas de lien direct vers le site B.

Pour tout entier naturel n , on note :

A_n : « Après n minutes, l'internaute est sur le site A » et a_n la probabilité de A_n .

B_n : « Après n minutes, l'internaute est sur le site B » et b_n la probabilité de B_n .

C_n : « Après n minutes, l'internaute est sur le site C » et c_n la probabilité de C_n .

On suppose que, initialement, l'internaute se trouve sur le site A de sorte que $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = 0$.

1. Traduire l'énoncé par un graphe probabiliste à trois états :

A : « l'internaute est sur le site A », B : « l'internaute est sur le site B »
et C : « l'internaute est sur le site C ».

2. Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe.
3. Quelle est la probabilité qu'au cours des 5 premières minutes, l'internaute soit resté sur le site A ? (On donnera une valeur exacte sous forme de fraction irréductible.)
4. Quelle est la probabilité qu'après 5 minutes de navigation l'internaute soit sur le site C ? (On donnera une valeur exacte sous forme de fraction irréductible.)

5. Compléter, directement sur l'énoncé, l'algorithme ci-dessous pour qu'il affiche en sortie les valeurs de a_N , b_N et c_N où N est un entier donné en entrée.

Entrée	Saisir N
Traitement	a prend la valeur ... b prend la valeur ... c prend la valeur ... Pour i allant de 1 à N d prend la valeur a a prend la valeur b prend la valeur c prend la valeur Fin Pour
Sortie	Afficher a , b et c

6. Justifier que le système admet un unique état stable P puis déterminer P .
Interpréter les coefficients de la matrice P en terme de fréquentation des trois sites.

On admet que, pour tout entier naturel n ,

$$M^n = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{4^{n-1}} & 1 + \frac{3}{2^n} - \frac{1}{4^{n-1}} & 3 - \frac{3}{2^n} \\ 2 - \frac{2}{4^n} & 1 + \frac{3}{2^n} + \frac{2}{4^n} & 3 - \frac{3}{2^n} \\ 2 - \frac{2}{4^n} & 1 - \frac{3}{2^n} + \frac{2}{4^n} & 3 + \frac{3}{2^n} \end{pmatrix}$$

7. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les expressions de a_n , b_n et c_n en fonction de l'entier n .
8. Existe-t-il un entier naturel n tel que la probabilité de C_n dépasse d'au moins 50% celle de A_n ?

Exercice 2 (facultatif). — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit M la matrice associée à un graphe probabiliste à n états c'est-à-dire une matrice carrée d'ordre n à coefficients positifs telle que, sur chaque ligne, la somme des coefficients est égale à 1. On dit qu'un réel λ est une valeur propre de M s'il existe une matrice colonne non nulle X de taille $n \times 1$ telle que $MX = \lambda X$.

1. Démontrer que 1 est une valeur propre de M .
2. Démontrer que si λ est une valeur propre de M alors $|\lambda| \leq 1$.