Devoir surveillé n°4

Durée : 1 heure

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Exercice 1. (4 points) — Dire, pour chacune des affirmations suivantes, si elle est vraie ou fausse en justifiant sa réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation.

1. On peut toujours multiplier deux matrices.

2. Pour toutes matrices carrées A et B d'ordre 2, si $A \times B = O_2$ alors $A = O_2$ ou $B = O_2$.

3. Pour tout réel a, la matrice $M = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ est inversible.

4. Pour toute matrice A carrée d'ordre 2, si $A^2 = I_2$ alors $A = I_2$ ou $A = -I_2$.

Exercice 2. (4 points) — On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. En utilisant la calculatrice, déterminer $A^3 - A$.

2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A.

3. Soit $(a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^3$. Résoudre le système $(S) : \begin{cases} x + 2z = a \\ -y + z = b \\ x - 2y = c \end{cases}$ d'inconnue $(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 3. (12 points) — On considère la matrice M définie par $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

1. On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$ et l'équation (E) : $X = MX + C$ d'inconnue X une matrice de taille 2×1.

a. Déterminer la matrice N telle que (E) soit équivalente à $NX = C$.

b. Sans utiliser la calculatrice, justifier que N est inversible et déterminer N^{-1}.

c. En déduire que l'unique solution de (E) est la matrice $V = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 10$, $b_0 = 20$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n + 3 \\ b_{n+1} = 6a_n + 3b_n + 10 \end{cases}.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et $Y_n = X_n - V$.

a. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n + C$ et, en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+1} = MY_n$.

b. On pose $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Vérifier que P est inversible et que $M = PDP^{-1}$.

c. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$.

d. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = M^nY_0$.

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n en fonction de n puis en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les valeurs de a_n et b_n en fonction de n.