NOM : .... **Prénom** ....

Terminales S1&3 – spécialité mathématiques jeudi 07 février 2019

Devoir surveillé n°4

Durée : 1 heure

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

On considère quatre entiers naturels non nuls a, b, c et d et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = an + b$, $B_n = cn + d$ et $D_n = \text{PGCD}(A_n, B_n)$.

Le but du problème est d'étudier le nombre D_n en fonction de n pour différentes valeurs de a, b, c et d.

Les deux parties du sujet sont totalement indépendantes l'une de l'autre.

Partie A (8 points). — Dans toute cette partie, on considère le cas où $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$ et $d = 1$.

1. Dans cette question, on s'intéresse aux nombres $A_{100} = 503$ et $B_{100} = 401$.

a. En utilisant l'algorithme d'Euclide, démontrer que 503 et 401 sont premiers entre eux.

b. Déduire de l'algorithme d'Euclide deux entiers u et v tels que $503u + 401v = 1$.

2. Dans cette question, n est un entier naturel quelconque. On a donc $A_n = 5n + 3$, $B_n = 4n + 1$ et $D_n = \text{PGCD}(A_n, B_n)$.

a. Montrer que $D_n \in \{1\,;7\}$.

b. Compléter, directement sur l'énoncé, le tableau suivant.

Reste de n modulo 7							
Reste de A_n modulo 7							
Reste de B_n modulo 7							

c. En déduire les valeurs de D_n selon le reste de n modulo 7.

d. Retrouver, à l'aide de la question **c.**, le résultat de la question **1.a.**.

Partie B (12 points). — Dans cette partie, on suppose que a, b, c et d sont des entiers naturels non nuls quelconques. On pose, de plus, $T = ad - bc$.

On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = an + b$, $B_n = cn + d$ et $D_n = \mathrm{PGCD}(A_n, B_n)$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, D_n divise T.

2. On considère l'implication suivante : « si $T = 1$ alors, pour tout entier naturel n, A_n et B_n sont premiers entre eux ».

- **a.** Cette implication est-elle vraie ?
- **b.** Énoncer l'implication réciproque. Celle-ci est-elle vraie ?

3. Dans toute cette question, on suppose que $T = 2$.

- **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelles sont les valeurs possibles pour D_n ?
- **b.** On suppose que a est pair et que b est impair. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n et B_n sont premiers entre eux.
- **c.** On suppose que a, b, c et d sont tous pairs. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de D_n.
- **d.** On suppose que b et d sont tous les deux pairs et qu'au moins un des deux nombres a ou c est impair. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de D_n en fonction de la parité de n.

4. Dans cette question, on suppose que T est un entier naturel strictement positif quelconque. On va montrer que la suite (D_n) est $T-$périodique i.e. que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_{n+T} = D_n$. On rappelle que, d'après la question **1.**, pour tout $n \in \mathbb{N}$, D_n divise T.

- **a.** Montrer que D_n divise A_{n+T} et D_n divise B_{n+T}.
- **b.** Montrer, de même, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, D_{n+T} divise A_n et B_n.
- **c.** Conclure.