

Correction du devoir surveillé n°4

Exercice 1.

1. a. Les divisions successives sont

$$331 = 1 \times 221 + 110$$

$$221 = 2 \times 110 + 1.$$

On obtient un reste égal à 1 donc $\text{PGCD}(331, 221) = 1$. De plus, en « remontant » l'algorithme d'Euclide, il vient :

$$1 = 221 - 2 \times 110 = 221 - 2 \times (331 - 221) = (-2) \times 331 + 3 \times 221$$

i.e. $221 \times 3 - 331 \times 2 = 1$ donc $\boxed{\text{une solution particulière de } (E) \text{ est } (3, 2)}$.

- b. Soit (x, y) une solution de (E) . Alors, $221x - 331y = 1 = 221 \times 3 - 331 \times 2$ i.e. $221(x - 3) = 331(y - 2)$. Ainsi, 331 divise $221(x - 3)$. Or, 331 est premier avec 221 donc, d'après le théorème de Gauss, 331 divise $x - 3$. Il existe donc un entier k tel que $x - 3 = 331k$ i.e. $x = 3 + 331k$. Dès lors, $221 \times 331k = 331(y - 2)$ donc $221k = y - 2$ i.e. $y = 2 + 221k$. Ainsi, une solution est de la forme $(3 + 331k, 2 + 221k)$. Réciproquement, soit $k \in \mathbb{Z}$, $x = 3 + 331k$ et $y = 2 + 221k$. Alors,

$$221x - 331y = 221(3 + 331k) - 331(2 + 221k) = 221 \times 3 - 331 \times 2 + 221 \times 331k - 331 \times 221k = 1$$

donc (x, y) est solution de (E) .

On conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E) \text{ est } \{(3 + 331k, 2 + 221k) \mid k \in \mathbb{Z}\}}$.

2. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $221m \equiv 1 \pmod{331}$ si et seulement s'il existe un entier n tel que $221m = 1 + 331n$ i.e. $221m - 331n = 1$. Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $221m \equiv 1 \pmod{331}$ si et seulement s'il existe un entier n tel que (m, n) soit solution de (E) . On déduit de la question 1 que $\boxed{\text{l'ensemble des entiers } m \text{ tels que } 221m \equiv 1 \pmod{331} \text{ est } \{3 + 331k \mid k \in \mathbb{Z}\}}$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $3 + 331k \geq 2018$ si et seulement si $k \geq \frac{2015}{331}$ i.e., comme $k \in \mathbb{Z}$, si et seulement si $k \geq 7$. De plus, la fonction $k \mapsto 3 + 331k$ est croissante sur $\mathbb{Z}$ donc l'entier m cherché correspond à $k = 7$. Ainsi, le plus petit entier $m \geq 2018$ tel que $221m \equiv 1 \pmod{331}$ est $\boxed{m = 2320}$.

Exercice 2.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, On admet que, pour tout entier naturel n ,

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{10}a_n + \frac{1}{5}b_n + 1 \\ \frac{1}{10}a_n + \frac{3}{5}b_n + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{10}a_n + \frac{1}{5}b_n \\ \frac{1}{10}a_n + \frac{3}{5}b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

donc, si on pose $\boxed{A = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n + B$.

2. Pour toute matrice colonne C de taille 2×1 , $C = AC + B$ équivaut à $(I_2 - A)C = B$.

Or, $I_2 - A = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$ donc $\det(I_2 - A) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{5} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10} \neq 0$ donc $I_2 - A$ est

inversible et $(I_2 - A)^{-1} = 10 \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. On en déduit que l'unique matrice C

telle que $C = AC + B$ est $C = (I_2 - A)^{-1}B$ i.e. $C = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $V_{n+1} = U_{n+1} - C = AU_n + B - (AC + B) = A(U_n - C) = AV_n$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = AV_n$.

- b. La suite (V_n) est une suite géométrique de matrices colonnes de raison A donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = A^n V_0 = A^n(U_0 - C)$. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n(U_0 - C) + C$.

- c. Étant donné que $U_0 - C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} \quad U_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n + 8 \\ -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n + 7 \end{pmatrix}$$

- d. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n + 8$. Étant donné que $-1 < \frac{1}{2} < 1$ et $-1 < \frac{4}{5} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$ donc, par produit et somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 8$.

Exercice 3. — Supposons que (a, b) est un couple d'entiers tels que $0 < a < b$ et tels que $\text{PPCM}(a, b) = \text{PGCD}(a, b)$. Notons $d = \text{PGCD}(a, b)$ et a' et b' les entiers tels que $a = da'$ et $b = db'$. Alors, par théorème, $\text{PPCM}(a, b) = da'b'$ donc $da'b' - d = 1$ i.e. $d(a'b' - 1) = 1$. Ainsi, d divise 1 donc, comme $d > 0$, $d = 1$. Il s'ensuit que $a = a'$, $b = b'$ et $ab - 1 = 1$ i.e. $ab = 2$. Comme $a < b$, on en déduit que $a = 1$ et $b = 2$. La réciproque est immédiate. Ainsi, l'ensemble des couples cherchés est $\{(1, 2)\}$.