

Devoir surveillé n°4

Durée : 1 heure

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. Tout document est interdit.

Exercice 1. (8 points)

1. On considère l'équation diophantienne

$$(E) : 221x - 331y = 1$$

d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

- a. En utilisant l'algorithme d'Euclide, démontrer que 331 et 221 sont premiers entre eux et en déduire une solution particulière de (E) .
 - b. Résoudre (E) .
2. a. Déterminer l'ensemble des entiers m tels que $221m \equiv 1 \pmod{331}$.
- b. Quel est le plus petit entier naturel $m \geq 2018$ tel que $221m \equiv 1 \pmod{331}$?

Exercice 2. (10 points) — On considère les deux suites (a_n) et (b_n) définies par : $a_0 = 9$, $b_0 = 7$ et, pour tout entier naturel n ,

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{7}{10}a_n + \frac{1}{5}b_n + 1 \\ b_{n+1} = \frac{1}{10}a_n + \frac{3}{5}b_n + 2 \end{cases}.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice carrée A d'ordre 2 et une matrice colonne B de taille 2×1 telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n + B$.
2. Déterminer une matrice colonne C de taille 2×1 telle que $C = AC + B$.
3. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n - C$.
 - a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = AV_n$.
 - b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de V_n puis de U_n en fonction de n , A , C et U_0 .

On admet que, pour tout entier naturel n ,

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n & -\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n \\ -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n & \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n \end{pmatrix}$$

- c. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression explicite de U_n en fonction de n .
- d. Quelle est la limite de (a_n) quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 3. (2 points) — Déterminer l'ensemble des couples d'entiers (a, b) , tels que $0 < a < b$, vérifiant l'égalité $\text{PPCM}(a, b) - \text{PGCD}(a, b) = 1$.