

Devoir surveillé donné en 2015

Durée : 1 heure

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. Tout document est interdit.

Le gestionnaire d'un site web, composé de trois pages web numérotées de 1 à 3 et reliées entre elles par des liens hypertextes, désire prévoir la fréquence de connexion sur chacune de ses pages web.

Des études statistiques lui ont permis de s'apercevoir que :

- si un internaute est sur la page n° 1, alors il ira soit sur la page n° 2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$ soit sur la page n° 3 avec la probabilité $\frac{3}{4}$;
- si un internaute est sur la page n° 2, alors soit il ira sur la page n° 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$, soit il restera sur la page n° 2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, soit il ira sur la page n° 3 avec la probabilité $\frac{1}{4}$;
- si un internaute est sur la page n° 3, alors soit il ira sur la page n° 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$, soit il ira sur la page n° 2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, soit il restera sur la page n° 3 avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n , on note :

A_n : « Après la n -ième navigation, l'internaute est sur la page n° 1 » et a_n la probabilité de A_n .

B_n : « Après la n -ième navigation, l'internaute est sur la page n° 2 » et b_n la probabilité de B_n .

C_n : « Après la n -ième navigation, l'internaute est sur la page n° 3 » et c_n la probabilité de C_n .

On suppose que, initialement, l'internaute se trouve sur la page n° 1 de sorte que $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = 0$.

1. Traduire l'énoncé par un graphe probabiliste à trois états :

A : « l'internaute est sur la page n° 1 », B : « l'internaute est sur la page n° 2 »

et C : « l'internaute est sur la page n° 3 ».

2. Ecrire la matrice de transition M associée à ce graphe.

3. Pour tout entier naturel n , on note $P_n = (a_n \quad b_n \quad c_n)$ l'état probabiliste après la n -ième navigation.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer P_{n+1} en fonction de P_n et de M et, en déduire l'expression de P_n en fonction de P_0 , de M et de n .

4. Quelle est la probabilité qu'après la cinquième navigation l'internaute se retrouve à nouveau sur la page n° 1 ? (On donnera une valeur exacte sous forme de fraction irréductible.)
5. Justifier que le système admet un unique état stable P puis déterminer P en résolvant un système linéaire. Interpréter les coefficients de la matrice P en terme de fréquentation des pages web.

On admet que, pour tout entier n non nul,

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

6. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les expressions de a_n , b_n et c_n en fonction de n .
7. Retrouver alors les résultats des questions 4 et 5.