Devoir surveillé n°3

Durée : 1 heure

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Exercice 1 (5 points). On considère les deux nombres complexes $z_1 = 2 + 3\,\mathrm{i}$ et $z_2 = -1 + 2\,\mathrm{i}$. Déterminer la forme algébrique des nombres suivants en détaillant les calculs nécessaires :

a) $z_3 = z_1 + z_2$; *b*) $z_4 = z_1 z_2$; *c*) $z_5 = \dfrac{1}{z_1}$; *d*) $z_6 = \dfrac{z_1}{z_2}$

e) $z_7 = \overline{z_1}$; *f*) $z_8 = \overline{z_1 - z_2}$; *g*) $z_9 = \dfrac{1}{\overline{z_2}}$: *h*) $z_{10} = \overline{\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)}$.

Exercice 2 (5 points). Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $(E) : (1 + 2\,\mathrm{i})z = 1 - 2\,\mathrm{i}\,z$.

2. $(F) : (z + \mathrm{i})(\mathrm{i}\,z + 1) = 0$.

3. $(G) : 2z + \overline{z} = \mathrm{i} + 2$.

4. $(H) : z^2 + 2\overline{z} + 1 = 0$.

Exercice 3 (3 points). Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $(1 + \mathrm{i})^n$ est un imaginaire pur.

Exercice 4 (5 points). Étant donné un nombre complexe w, on dit qu'un nombre complexe u est une racine carrée de w si $u^2 = w$.

1. Soit $w \in \mathbb{C}$. Supposons que u est une racine carrée de w.

a. Montrer que l'équation $z^2 = w$ est équivalente à l'équation $(z - u)(z + u) = 0$.

b. En déduire que w possède au plus deux racines carrées.

2. On suppose que u est une racine carrée du nombre i et on écrit u sous forme algébrique $u = a + \mathrm{i}\,b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

a. Justifier que $\begin{cases} a^2 = b^2 \\ 2ab = 1 \end{cases}$

b. En déduire que $a \in \left\{-\dfrac{1}{\sqrt{2}} ; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ et que $a = b$.

c. Déterminer l'ensemble des racines carrées de i.

Exercice 5 (2 points). Soit z un nombre complexe qui n'est pas réel et u un complexe différent de 1. On pose

$$Z = \frac{z - u\overline{z}}{1 - u}.$$

Démontrer que Z est réel si et seulement si $u\overline{u} = 1$. (*Remarque* : écrire z et/ou u sous forme algébrique n'est pas conseillé.)