

Corrigé du devoir surveillé n°3

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

a. Par définition, $a_1 = 0,3 \times 1 + 0,5 \times 2 = 1,3$ et $b_1 = -0,5 \times 1 + 1,3 \times 2 = 2,1$ donc

$$\boxed{X_1 = \begin{pmatrix} 1,3 \\ 2,1 \end{pmatrix}}.$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3a_n + 0,5b_n \\ -0,5a_n + 1,3b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 \\ -0,5 & 1,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

donc $X_{n+1} = AX_n$ avec $\boxed{A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 \\ -0,5 & 1,3 \end{pmatrix}}$.

2. On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix}$.

a. Comme $\det P = 1 \times 1 - 0 \times 1 = 1 \neq 0$, P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ i.e.

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

b. À l'aide de la calculatrice, on trouve $PTP^{-1} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 \\ -0,5 & 1,3 \end{pmatrix}$ i.e. $\boxed{PTP^{-1} = A}$.

c. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $H_n : \ll A^n = PT^n P^{-1} \gg$.

Comme $A^0 = I_2$ et $PT^0 P^{-1} = PI_2 P^{-1} = PP^{-1} = I_2$, H_0 est vraie.

On suppose que H_k est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Alors, grâce à la question précédente,

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k A = (PT^k P^{-1})(PTP^{-1}) = PT^k (P^{-1}P) TP^{-1} \\ &= PT^k I_2 TP^{-1} = PT^k TP^{-1} = PT^{k+1} P^{-1} \end{aligned}$$

donc H_{k+1} est vraie.

Ainsi, on a montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, A^n = PT^n P^{-1}}$.

3. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $G_n : \ll T^n = 0,8^{n-1} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5n \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix} \gg$.

Comme $T^0 = I_2$ et $0,8^{0-1} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 \times 0 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix} = \frac{1}{0,8} \begin{pmatrix} 0,8 & 0 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix} = I_2$, G_0 est vraie.

Supposons que G_k est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

Alors,

$$\begin{aligned} T^{k+1} &= T^k T = 0,8^{k-1} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5k \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix} \\ &= 0,8^{k-1} \begin{pmatrix} 0,8^2 & 0,8 \times 0,5 + 0,5k \times 0,8 \\ 0 & 0,8^2 \end{pmatrix} \\ &= 0,8^{k-1} \begin{pmatrix} 0,8^2 & 0,8(0,5 + 0,5k) \\ 0 & 0,8^2 \end{pmatrix} \\ &= 0,8^k \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5(k+1) \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc G_{k+1} est vraie.

Ainsi, on a démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, T^n = 0,8^{n-1} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5n \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix}}$.

4. a. On déduit des résultats précédents que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = A^n X_0 = (PT^n P^{-1})X_0 = PT^n(P^{-1}X_0).$$

Or, $P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T^n(P^{-1}X_0) = 0,8^{n-1} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5n \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,8^{n-1} \begin{pmatrix} 0,8 + 0,5n \\ 0,8 \end{pmatrix}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} PT^n P^{-1}X_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times 0,8^{n-1} \begin{pmatrix} 0,8 + 0,5n \\ 0,8 \end{pmatrix} = 0,8^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 + 0,5n \\ 0,8 \end{pmatrix} \\ &= 0,8^{n-1} \begin{pmatrix} 0,8 + 0,5n \\ 0,8 + 0,8 + 0,5n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i.e. $\boxed{X_n = 0,8^{n-1} \begin{pmatrix} 0,8 + 0,5n \\ 1,6 + 0,5n \end{pmatrix}}$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0,8^{n-1}(0,8 + 0,5n)$ i.e.

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, a_n = 0,8^n + 0,5n0,8^{n-1}}.$$

5. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Appliquons l'inégalité de Bernoulli avec $x = 0,2$ alors $1,2^n = (1 + 0,2)^n \geq 1 + 0,2n$ donc $5 \times 1,2^n \geq 5(1 + 0,2n) = 5 + n \geq n$. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, 5 \times 1,2^n \geq n}$.

b. Comme $-1 < 0,8 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq 0,5n0,8^{n-1} \leq 0,5(5 \times 1,2^n)8^{n-1} = 2,5 \times 1,2 \times (1,2 \times 0,8)^n = 3(0,96)^{n-1}.$$

Or, $-1 < 0,96 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,96^{n-1} = 0$ et, par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5n0,8^{n-1} = 0. \text{ Par somme, on conclut que } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0}.$$

6. a. Cet algorithme calcule la première valeur de a_n telle que $a_n \leq 0,01$.

b. Pour qu'il affiche le premier rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \leq 10^{-3}$, on peut modifier l'algorithme de la manière suivante :

$A \leftarrow 1$
$B \leftarrow 2$
$N \leftarrow 0$
Tant que $A > 0,001$
$C \leftarrow A$
$A \leftarrow 0,3C + 0,5B$
$B \leftarrow -0,5C + 1,3B$
$N \leftarrow N + 1$
Fin de boucle Tant que
Afficher N