

Devoir surveillé n°3

Durée : 1 heure

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. Tout document est interdit.

On considère deux suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,3a_n + 0,5b_n \\ b_{n+1} = -0,5a_n + 1,3b_n \end{cases}$$

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
 - a. Justifier que $X_1 = \begin{pmatrix} 1,3 \\ 2,1 \end{pmatrix}$.
 - b. Déterminer la matrice carrée A d'ordre 2 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix}$.
 - a. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}
 - b. Calculer PTP^{-1} .
 - c. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = 0,8^{n-1} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5n \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix}$.
4. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
 - a. En utilisant les résultats précédents, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = 0,8^{n-1} \begin{pmatrix} 0,8 + 0,5n \\ 1,6 + 0,5n \end{pmatrix}.$$

- b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de a_n en fonction de n .
5. a. On rappelle l'inégalité de Bernoulli :

pour tout réel $x > -1$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

En utilisant l'inégalité de Bernoulli, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5 \times 1,2^n \geq n$.

 - b. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.
6. On considère l'algorithme suivant :

```

A ← 1
B ← 2
Tant que A > 0,01
|   C ← A
|   A ← 0,3C + 0,5B
|   B ← -0,5C + 1,3B
Fin de boucle Tant que
    
```

- a. Expliquer ce que calcule cet algorithme.
- b. Modifier l'algorithme précédent pour qu'il affiche le premier rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \leq 10^{-3}$.