Terminales S1&3 – spécialité mathématiques jeudi 07 février 2019

Devoir surveillé n°4

Durée : 1 heure

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Exercice 1 (4 points)

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, démontrer que 2 019 et 1 977 sont premiers entre eux.

2. Déduire de l'algorithme d'Euclide deux entiers u et v tel que $2\,018u + 1\,977v = 1$.

Exercice 2 (4 points). — Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $a_n = 3n + 1$ et $b_n = 4n + 3$. On note d_n le P.G.C.D. de a_n et b_n.

1. Démontrer que $d_n \in \{1, 5\}$.

2. Déterminer, en fonction du reste de n modulo 5, la valeur de d_n.

Exercice 3 (10 points). — On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est un entier.

2. On suppose dans cette question que n est pair. On note k l'entier naturel tel que $n = 2k$.

a. Démontrer que $\mathrm{PGCD}(T_{2k}\,; T_{2k+1}) = (2k + 1)\mathrm{PGCD}(k\,; k + 1)$.

b. Déterminer $\mathrm{PGCD}(k\,; k + 1)$.

c. En déduire $\mathrm{PGCD}(T_{2k}\,; T_{2k+1})$.

3. On suppose dans cette question que n est impair. On note k l'entier naturel tel que $n = 2k + 1$.

a. Démontrer que les entiers $2k + 1$ et $2k + 3$ sont premiers entre eux.

b. En déduire $\mathrm{PGCD}(T_{2k+1}\,; T_{2k+2})$.

4. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que T_n et T_{n+1} sont premiers entre eux.

Exercice 4 (2 points). — Soit un entier $n \geqslant 7$.

1. On suppose que n est impair. Démontrer qu'il existe deux entiers $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 2$ premiers entre eux tels que $n = a + b$.

2. (Facultatif) Montrer que le résultat précédent est également vrai si n est pair. (On pourra raisonner selon le reste de n modulo 4).