Devoir surveillé n°3

Durée : 1 heure

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. Tout document est interdit.

Dans toute la suite, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

1. On note I_3 la matrice identité d'ordre 3.

a. Exprimer $A^2 - 3A$ en fonction de I_3.

b. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et de I_3.

2. On considère les suites (r_n) et (s_n) définies par $r_0 = 0$ et $s_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} r_{n+1} = 3r_n + s_n \\ s_{n+1} = -2r_n \end{cases}.$$

En utilisant la question 1.a, démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $A^n = r_nA + s_nI_3$.

3. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \begin{pmatrix} r_n \\ s_n \end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice B telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = BC_n$.

Il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = B^nC_0$. (On pourra utiliser sans démonstration ce résultat dans la suite.)

4. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.

b. Calculer PDP^{-1}.

5. **a.** Démontrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n = PD^nP^{-1}$.

b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & 2 - 2^n \end{pmatrix}$.

6. Déduire des questions précédentes, pour tout entier naturel n, une expression explicite de r_n et s_n en fonction de n.

7. Déterminer, pour tout entier naturel n, une expression de A^n en fonction de n, A et I_3 puis une expression explicite de A^n en fonction de n seulement.

8. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n est inversible et montrer qu'il existe deux réels c_n et d_n, que l'on explicitera en fonction de n, tels que $(A^n)^{-1} = c_nA + d_nI_3$.