

Devoir surveillé n°2

Durée : 1 heure

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Exercice 1 (5 points).

1. Déterminer l'ensemble des entiers x tels que $2x \equiv 3 \pmod{5}$.
2. Déterminer l'ensemble des entiers x tels que $x^2 \equiv 3 \pmod{5}$.
3. Déterminer l'ensemble des entiers x tels que $(3x + 4)(2x + 1) \equiv 0 \pmod{5}$.

Exercice 2 (2 points). — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 13 divise $7^{2n} - 23^n$.

Exercice 3 (5 points).

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $10^n \equiv 10 \pmod{45}$.
2. Soit $N = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0}$ un entier écrit en base 10. Montrer que N est divisible par 45 si et seulement si $a_0 + 10 \sum_{j=1}^k a_j$ est divisible par 45.
3. En utilisant le critère de la question précédente, étudier la divisibilité par 45 des nombres $N_1 = 20\,152\,016$ et $N_2 = 20\,152\,035$.

Exercice 4 (10 points). Dans cet exercice, on pourra utiliser les résultats suivants :

- les diviseurs positifs de 2019 sont 1, 3, 673 et 2019 ;
- les diviseurs positifs de 1009 sont 1 et 1009.
- les diviseurs positifs de 335 sont 1, 5, 67 et 335.

Étant donné un entier naturel non nul d , on considère l'équation

$$(E_d) : x^2 - dy^2 = 2019.$$

d'inconnue $(x; y) \in \mathbb{N}^2$.

1. **a.** Déterminer le reste de 2019 modulo 7.
b. Soit $m \in \mathbb{Z}$. En utilisant un tableau de restes, déterminer les restes possibles pour m^2 modulo 7.
c. En déduire que si d est un multiple de 7 alors l'ensemble des solutions de (E_d) est vide.
2. En reprenant le même raisonnement que dans la question 1., montrer que si 4 divise d alors l'ensemble des solutions de (E_d) est vide.
3. **a.** On suppose que $(x; y)$ est une solution de (E_1) . Montrer que $(x - y; x + y)$ est un couple de diviseurs positifs de 2019.
b. En déduire l'ensemble des solutions de E_1 .
4. On suppose qu'il existe un entier $k \geq 2$ tel que $d = k^2$.
a. En s'inspirant de la question précédente, montrer que si (E_d) possède une solution alors $k \in \{5; 67; 335; 1009\}$.
b. Pour les valeurs de k obtenues à la question précédente, déterminer l'ensemble des solutions de (E_d) .