NOM : .... **Prénom :** ....

Terminales S1&3 – spécialité mathématiques mardi 12 novembre 2019

Devoir surveillé n°2

Durée : 1 heure

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Exercice 1 (4 points).

1. Déterminer l'ensemble des entiers x tels que $2x \equiv 4\ [6]$.
2. Déterminer l'ensemble des entiers x tels que $x^2 \equiv 2x\ [6]$.

Exercice 2 (4 points).

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. En utilisant un tableau, déterminer les restes possibles de n^2 modulo 7.
2. En utilisant un tableau à double entrée, montrer que si $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ est une solution de l'équation $x^2 + y^2 = 7^{2019}$ alors 7 divise x et 7 divise y.

Exercice 3 (6 points). — Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $A_n = 3^{4n+3} + 4^{2n+1}$.

1. Démontrer que $3^{4n} \equiv 1\ [5]$ et que $4^{2n} \equiv 1\ [5]$.
2. En déduire que 5 divise $A_n - 1$.
3. Justifier que $A_n - 1$ est pair.
4. Déduire des questions précédentes le chiffre des unités de A_n.

Exercice 4 (8 points). — Dans cet exercice, on souhaite déterminer les entiers a compris entre 0 et 9 tels qu'il existe un entier naturel $n_a \geqslant 10$ tels que les deux derniers chiffres dans l'écriture décimale de n_a^2 soient 0 et a. Dans ce cas, on dira que n_a^2 se termine par $\overline{0a}$

1. Déterminer un entier $n_0 \geqslant 10$ tel que l'écriture décimale de n_0^2 se termine par $\overline{00}$.
2. **a.** Soit $b \in \mathbb{Z}$. Justifier que $(100 + b)^2 \equiv b^2\ [100]$.

   b. En déduire un entier $n_1 \geqslant 10$ tel que n_1^2 se termine par $\overline{01}$, un entier $n_4 \geqslant 10$ tel que n_4^2 se termine par $\overline{04}$ et un entier $n_9 \geqslant 10$ tel que n_9^2 se termine par $\overline{09}$.
3. Soit n un entier supérieur ou égal à 10. On note d le chiffre des dizaines de n et u le chiffre des unités de n.

   a. On note a le chiffre des unités de n^2.

   Compléter directement sur l'énoncé le tableau suivant.

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a										

   Pour les questions suivantes, on pensera au fait que $n \equiv 10d + u\ [100]$.

   b. On suppose que $u = 5$. Montrer que n^2 se termine par $\overline{25}$.

   c. On suppose que n^2 se termine par $\overline{06}$.

   Montrer qu'il existe un entier k tel que $40dk + 4k^2 \equiv 6\ [100]$ et aboutir à une absurdité.
4. Conclure