NOM : .... **Prénom : ....**

Terminales S1&2 – spécialité mathématiques vendredi 10 novembre 2017

Devoir surveillé n°2

Durée : 1 heure

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Exercice 1 (5 points).

1. Déterminer l'ensemble des entiers x tels que $2x \equiv 3\ [7]$.

2. Déterminer l'ensemble des entiers x tels que $2x^2 \equiv 3\ [7]$.

Exercice 2 (5 points).

1. Justifier que $2^{10} \equiv 24 \pmod{100}$ et en déduire que $2^{20} \equiv 76 \pmod{100}$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $76^n \equiv 76 \pmod{100}$.

3. Déduire des questions précédentes les deux derniers chiffres dans l'écriture décimale de 2^{1000}.

Exercice 3 (3 points). — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = 2017^n + 2018^n$.

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste dans la division euclidienne de A_n par 5 en fonction de n.

Exercice 4 (7 points). — Dans cet exercice, on s'intéresse à la possibilité, pour un entier $n > 0$ donné, d'écrire $2^n - 1$ comme une somme de 3 carrés d'entiers naturels. Autrement dit, on s'intéresse à l'existence de solutions dans $\mathbb{N}^3$ pour l'équation

$$(E_n) \;:\; x^2 + y^2 + z^2 = 2^n - 1.$$

1. Déterminer une solution simple de (E_1).

2. Déterminer une solution simple de (E_2).

3. On suppose $n \geqslant 3$.

a. Montrer que $2^n - 1 \equiv 7$ [8].

b. Soit $m \in \mathbb{N}$. Compléter (directement sur l'énoncé) le tableau suivant :

Reste de m modulo 8	0	1	2	3	4	5	6	7
Reste de m^2 modulo 8								

c. Soit a et b deux entiers naturels. Compléter (directement sur l'énoncé) le tableau suivant qui donne les restes possibles de $a^2 + b^2$ modulo 8 en fonction des restes de a^2 et b^2 modulo 8.

a^2 \ b^2			

d. Soit a, b et c trois entiers naturels. Compléter (directement sur l'énoncé) le tableau suivant qui donne les restes possibles de $a^2 + b^2 + c^2$ modulo 8 en fonction des restes de $a^2 + b^2$ et c^2 modulo 8.

$a^2 + b^2$ \ c^2			

e. Que peut-on en déduire concernant l'équation (E_n) ?