NOM : .... **Prénom : ....**

Terminales S3&4 – spécialité mathématiques mercredi 26 novembre 2014

Devoir surveillé n°2

Durée : 2 heures

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Exercice 1. (3 points) — Dire, pour chacune des affirmations suivantes, si elle est vraie ou fausse en justifiant sa réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation.

1. On peut toujours additionner deux matrices.
2. Pour toutes matrices carrées A et B d'ordre 2, $A \times B = B \times A$.
3. La matrice identité d'ordre 2 est $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
4. La matrice A telle que $a_{11} = 1$, $a_{21} = 2$, $a_{12} = 3$ et $a_{22} = 4$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
5. Pour toute matrice A carrée d'ordre 2, si $A \neq O_2$ alors $A^2 \neq O_2$.

Exercice 2. (3 points) — On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -6 & 7 & -4 \\ -5 & 6 & -4 \end{pmatrix}$.

1. En utilisant la calculatrice, calculer A^2 et A^3.
2. A l'aide de la question 1, et sans faire de calculs numériques (ni à la main ni à la calculatrice), déterminer A^4, A^5 et A^6.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et r le reste dans la division euclidienne de n par 3. Démontrer que $A^n = A^r$.

Exercice 3. (4 points) — On considère la matrice $N = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ et la matrice $A = I_3 + N$.

1. Expliciter, en détaillant les calculs, la matrice A.
2. En utilisant la calculatrice, calculer N^2 et N^3.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(I_3 + N)^k = I_3 + kN + \frac{k(k-1)}{2}N^2$.
4. Déduire de la question précédente que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = \begin{pmatrix} 1+3k & 9k & -9k \\ 3k^2 - k & 9k^2 - 9k + 1 & -9k^2 + 9k \\ 3k^2 & 9k^2 - 6k & -9k^2 + 6k + 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. (3 points)

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Quel est le reste dans la division euclidienne de 8^k par 7 ?
2. On considère un entier naturel $N = \overline{a_n a_{n-1} ... a_0}^8$ écrit en base 8.
   Démontrer que N est divisible par 7 si et seulement si $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n$ est divisible par 7.
3. Dans cette question, N est le nombre dont l'écriture décimale est 86 415.
   - **a.** Déterminer l'écriture de N en base 8.
   - **b.** Etudier, en utilisant la question 2, si N est divisible par 7.

Exercice 5. (7 points)

1. On considère l'équation (E_1) : $m^2 + 9 = 2^n$ et on suppose que cette équation admet une solution $(m\,; n)$ formée d'entiers naturels.
   - **a.** Justifier que $n \geq 4$.
   - **b.** Démontrer que m est impair.
   - **c.** Compléter (directement sur l'énoncé) le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de m par 4	0	1	2	3
Reste de la division euclidienne de m^2 par 4				
Reste de la division euclidienne de $m^2 + 9$ par 4				

   - **d.** Déduire des questions précédentes que l'équation (E_1) n'a pas de solution dans $\mathbb{N}^2$.
2. On considère l'équation (E_2) : $m^2 + 9 = 3^n$ et on suppose que cette équation admet une solution $(m\,; n)$ formée d'entiers naturels.
   - **a.** Justifier que $n \geq 2$.
   - **b.** Démontrer que m est pair.
   - **c.** Démontrer que 3^n est congru à 1 ou 3 modulo 4.
   - **d.** Déduire des questions précédentes que n est pair.
   - **e.** On écrit $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $(3^k - m)(3^k + m) = 9$ et en déduire que l'équation (E_2) admet une unique solution dans $\mathbb{N}^2$ qu'on explicitera.
3. L'équation $m^2 + 9 = 4^n$ a-t-elle des solutions dans $\mathbb{N}^2$?

Exercice 6. (facultatif) — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} 7^k$. Déterminer, en fonction de n, le chiffre des unités (dans l'écriture décimale) de A_n.