Devoir surveillé n˚2

Durée : 2 heures

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Exercice 1. (4 points) — Soit n un entier naturel non nul. On considère l'équation

$$(G)\ 3x^2 + 7y^2 = 10^{2n} \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs.}$$

1. Montrer que $100 \equiv 2$ (modulo 7).
Démontrer que si $(x\,;y)$ est solution de (G) alors $3x^2 \equiv 2^n$ (modulo 7).

2. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7.							

3. Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.
En déduire que l'équation (G) n'admet pas de solution.

Exercice 2. (6 points) — On note 0, 1, 2, …, 9, α, β, les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12. Par exemple :

$$\overline{\beta\alpha 7}^{12} = \beta \times 12^2 + \alpha \times 12 + 7 = 11 \times 12^2 + 10 \times 12 + 7 = 1\,711 \text{ en base } 10$$

1. a. Soit N_1 le nombre dont l'écriture en base 12 est $N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$.
Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.

b. Soit N_2 le nombre dont l'écriture en base 10 est $N_2 = 1\,131 = 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1$.
Déterminer l'écriture de N_2 en base 12.

Dans toute la suite, un entier naturel N s'écrira de manière générale en base 12 :

$$N = \overline{a_n \cdots a_1 a_0}^{12}$$

2. a. Démontrer que $N \equiv a_0$ (3). En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.

b. A l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_2 est divisible par 3. Confirmer avec son écriture en base 10.

3. a. Démontrer que $N \equiv a_n + \cdots + a_1 + a_0$ (11). En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre écrit en base 12.

b. A l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_1 est divisible par 11. Confirmer avec son écriture en base 10.

Exercice 3. (4 points) — Dire, pour chacune des affirmations suivantes, si elle est vraie ou fausse en justifiant sa réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation.

1. On peut toujours additionner deux matrices.

2. Pour toutes matrices carrées A et B d'ordre 2, $A \times B = B \times A$.

3. La matrice identité d'ordre 2 est $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. La matrice A telle que $a_{11} = 1$, $a_{21} = 2$, $a_{12} = 3$ et $a_{22} = 4$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

5. Pour toute matrice carrée A d'ordre 2, si $A \neq O_2$ alors $A^2 \neq O_2$.

6. Il existe une matrice carrée A d'ordre 3 telle que $A \neq I_3$ et $A^2 = I_3$.

Exercice 4. (3 points) — On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -6 & 7 & -4 \\ -5 & 6 & -4 \end{pmatrix}$.

1. En utilisant la calculatrice, calculer A^2 et A^3.

2. A l'aide de la question 1, et sans faire de calculs numériques (ni à la main ni à la calculatrice), déterminer A^4, A^5 et A^6.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et r le reste dans la division euclidienne de n par 3. Démontrer que $A^n = A^r$.

Exercice 5. (3 points) — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 et A^4.

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, conjecturer l'expression de A^k en fonction de k

3. Démontrer la conjecture précédente en raisonnant par récurrence.

4. Soit $b \in \mathbb{R}$ et $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ b & b \end{pmatrix}$. Déduire de la question précédente l'expression de B^k en fonction de b et de k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6. (facultatif) — Soit A et B deux matrices carrées non nulles d'ordre n telles que

1. A et B commutent ;

2. $A^2 = O_n$.

Conjecturer puis démontrer par récurrence l'expression de $(A+B)^k$ en fonction de A, B^{k-1} et B^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.