Corrigé du devoir surveillé n°1

Exercice 1.

1. FAUX. Par exemple, 7 divise 7 mais 14 ne divise pas 7.
2. VRAI. Soit n un entier tel que 5 divise n. Alors, il existe un entier k tel que $n = 5k$ donc $n^2 = (5k)^2 = 25k^2$ donc, comme k^2 est un entier, 25 divise n^2.
3. FAUX. Par exemple, 3 divise $1 + 2 = 3$ mais 3 ne divise pas 1 (ni 2).
4. VRAI. Soit a et b deux entiers tels que 6 divise a et 6 divise $a + b$. Alors, 6 divise $(a + b) - a = b$.

Exercice 2.

1. Soit n un entier. Alors, $4n + 1$ divise 13 si et seulement si $4n + 1 \in \{-13\,;-1\,;1\,;13\}$ i.e. $n \in \{-\frac{14}{4}\,;-\frac{1}{2}\,;0\,;3\}$. Comme n est entier, on en déduit que l'ensemble cherché est $\{0\,;3\}$.
2. Soit n un entier. Alors, 13 divise $n+2$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n+2 = 13k$ i.e. $n = 13k - 2$. Ainsi, l'ensemble cherché est $\{13k - 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
3. Soit un entier n tel que $n + 2$ divise $4n + 1$. Alors, $n + 2$ divise $n + 2$ et $4n + 1$ donc $n + 2$ divise $4(n + 2) - (4n + 1) = 7$ donc $n + 2 \in \{-7\,;-1\,;1\,;7\}$ i.e. $n \in \{-9\,;-3\,;-1\,;5\}$.

   Réciproquement, si $n = -9$ alors $n + 2 = -7$ divise $4n + 1 = -35$, si $n = -3$ alors $n + 2 = -1$ divise $4n + 1 = -11$, si $n = -1$ alors $n + 2 = 1$ divise $4n + 1 = -3$ et si $n = 5$ alors $n + 2 = 7$ divise $4n + 1 = 21$. Ainsi, l'ensemble cherché est $\{-9\,;-3\,;-1\,;5\}$.

Exercice 3.

1. $2\,020 = 106 \times 19 + 6$ et $0 \leqslant 6 < 19$ donc $r = 6$.
2. $-2\,020 = (-97) \times 21 + 17$ et $0 \leqslant 17 < 21$ donc $r = 17$.
3. $n^2 + 3n + 1 = (n - 1)(n + 4) + 5$ donc si $n \geqslant 2$, $0 \leqslant 4 < n + 4$ et ainsi $r = 4$. Si $n = 0$, $A = 1$ et $B = 4$ donc $r = 1$ (car $0 \leqslant A < B$) et si $n = 1$, $A = 5$ et $B = 5$ donc $r = 0$ car B divise A.

   Ainsi, $r = 1$ si $n = 0$, $r = 0$ si $n = 1$ et $r = 5$ si $n \geqslant 2$.

Exercice 4.

1. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition P_n : « u_n est un multiple de 7 ».

   Comme $u_0 = 7$, P_0 est vraie.

   Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que P_k est vraie. Alors, il existe un entier d tel que $u_k = 7d$ donc $u_{k+1} = 3u_k + 14 = 3(7d) + 2 \times 7 = 7(3d + 2)$. Comme $3d + 2$ est un entier, on conclut que u_{k+1} est un multiple de 7 donc P_{k+1} est vraie.

   Ainsi, on a montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est un multiple de 7.

2. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition Q_n : « u_n est impair ».

Comme $u_0 = 7$, Q_0 est vraie.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que Q_k est vraie. Alors, il existe un entier d tel que $u_k = 2d + 1$ donc $u_{k+1} = 3u_k + 14 = 3(2d+1) + 2 \times 7 = 2(3d+8) + 1$. Comme $3d + 8$ est un entier, on conclut que u_{k+1} est impair donc P_{k+1} est vraie.

Ainsi, on a montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est impair.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 7 = 3u_n + 14 + 7 = 3u_n + 21 = 3(u_n + 7) = 3v_n$$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

b. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 3^n$. Or, $v_0 = u_0 + 7 = 14$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 14 \times 3^n$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n - 7$ donc $u_n = 14 \times 3^n - 7$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $u_n = 14 \times 3^n - 7 = 7(2 \times 3^n - 1)$ donc, comme $2 \times 3^n - 1$ est un entier, 7 divise u_n. De plus, $u_n = 2(7 \times u_n - 4) + 1$ donc, comme $7 \times u_n - 4)$ est un entier, u_n est impair.

d. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $\vec{n} \geqslant 2$ alors $3^n = 3^{n-2} \times 9$ est un multiple de 9 car $n - 2 \geqslant 0$. On a alors $u_n = (14 \times 3^{n-2} - 1) \times 9 + 2$ avec $0 \leqslant 2 < 9$ donc le reste de u_n dans la division par 9 est 2.

De plus, $u_0 = 7$ et $0 \leqslant 7 < 9$ donc si $n = 0$ alors le reste de u_n dans la division par 9 et 7 et $u_1 = 35 = 3 \times 9 + 8$ et $0 \leqslant 8 < 9$ donc si $n = 1$ alors le reste de u_n dans la division par 9 est 8.

Ainsi, le reste de u_n dans la division par 9 est 7 si $n = 0$, 8 si $n = 1$ et 2 si $n \geqslant 2$.

Exercice 5.

<u>1ère méthode</u>. On considère n entiers consécutifs. Si on note a le plus petit de ces entiers alors la somme vaut

$$S = a + (a+1) + (a+2) + \cdots + (a+n-1) = na + \sum_{k=1}^{n-1} k = na + \frac{n(n-1)}{2} = n\left(a + \frac{n-1}{2}\right).$$

Or, n est impair donc $n - 1$ est pair et ainsi $a + \frac{n-1}{2}$ est entier donc n divise S.

<u>2e méthode</u>. On considère n entiers consécutifs. Comme n est impair, il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$. Si on note a le $(k+1)$e de ces entiers alors la somme vaut

$$S = (a-k) + (a-k+1) + \cdots + (a-1) + a + (a+1) + \cdots + (a+k-1) + (a+k) = na$$

car tous les termes autres que les a s'annulent deux à deux. On en déduit que n divise S.