

Devoir surveillé n°1

Durée : 1 heure

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Exercice 1 (4 points). Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant sa réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation.

1. Pour tout entier n , si 7 divise n alors 14 divise n .
2. Pour tout entier n , si 5 divise n alors 25 divise n^2 .
3. Pour tous entiers a et b , si 3 divise $a + b$ alors 3 divise a et 3 divise b .
4. Pour tous entiers a et b , si 6 divise a et 6 divise $a + b$ alors 6 divise b .

Exercice 2 (4 points).

1. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $4n + 1$ divise 13.
2. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que 13 divise $n + 2$.
3. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $n + 2$ divise $4n + 1$.

Exercice 3 (4 points). Dans chaque cas, déterminer le reste r dans la division euclidienne de A par B .

1. $A = 2020$ et $B = 19$;
2. $A = -2020$ et $B = 21$;
3. $A = n^2 + 3n + 1$ et $B = n + 4$ où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 (8 points). On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 7$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 14$. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est un multiple de 7.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est impair.
3. On considère la suite (v_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + 7$.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
 - b. Déterminer une expression explicite de (v_n) en fonction de n et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 14 \times 3^n + 7$.
 - c. À l'aide de la question précédente, retrouver le résultat des questions **1.** et **2.**.
 - d. Déterminer, selon les valeurs de n , le reste dans la division euclidienne de u_n par 9.

Exercice 5 (facultatif). Soit n un entier naturel impair. La somme de n entiers consécutifs est-elle toujours divisible par n ?