Devoir surveillé n°1

Durée : 1 heure

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Questions de cours. (3 points) — Soit a, b, c, m et n des entiers.

1. Rappeler la définition de « a divise b ».

2. Démontrer que si a divise b alors ma divise mb.

3. Démontrer que si c divise a et c divise b alors c divise $ma + nb$.

Exercice 1. (4 points) — Dans chaque cas, déterminer le reste r dans la division euclidienne de A par B.

1. $A = 2\,018$ et $B = 29$;

2. $A = -2\,018$ et $B = 17$;

3. $A = n^2 + 3n + 1$ et $B = n + 2$ où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. (5 points) — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = 4^n + 15n - 1.$$

1. Calculer u_0, u_1 et u_2 et montrer que ces trois entiers sont tous divisibles par 9.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n - 45n + 18$.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 9 divise u_n.

Exercice 3. (2 points) — Soit n un entier impair. Démontrer que 8 divise $n^2 - 1$.

Exercice 4. (8 points) — On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = 2^{(2^n)} + 1$. Ainsi, $F_0 = 2^{(2^0)} + 1 = 2^1 + 1 = 3$, $F_1 = 2^{(2^1)} + 1 = 2^2 + 1 = 5$, $F_2 = 2^{(2^2)} + 1 = 2^4 + 1 = 17$, etc.

1. Calculer F_5 et vérifier que 641 divise F_5.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que les diviseurs de F_n sont tous impairs.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- **a.** Montrer que $F_{n+1} - 2 = F_n(F_n - 2)$.
- **b.** En déduire, en utilisant aussi la question **2.**, que si un entier naturel d divise F_n et F_{n+1} alors $d = 1$.

4.

- **a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $F_n = F_0 \times F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_{n-1} + 2$.
- **b.** Soit m et n deux entiers tels que $0 \leqslant m < n$. Déduire de la question précédente que si un entier naturel d divise F_m et F_n alors $d = 1$.