Corrigé du devoir surveillé n°1

Questions de cours.

1. On dit que x divise y s'il existe un entier k tel que $y = kx$.

2. Soit $(u\,;v) \in \mathbb{Z}^2$. Supposons que x divise y et x divise z. Alors, il existe deux entiers k et k' tels que $y = kx$ et $z = k'x$. On a alors,

$$uy + vz = u(kx) + v(k'x) = (uk + vk')x$$

et, comme u, v, k et k' sont des entiers, $uk + vk'$ est un entier. On conclut que x divise $uy + vz$.

3. Supposons que x divise y et y divise z. Alors, il existe des entiers k et k' tels que $y = kx$ et $z = k'y$. Dès lors, $z = k'(kx) = (kk')x$ et, comme k et k' sont entiers, kk' est aussi un entier. On conclut que x divise z.

Exercice 1. — On note r le reste dans la division euclidienne de A par B.

1. Comme $2\,017 = 72 \times 28 + 1$ et $0 \leqslant 1 < 28$, $\boxed{r = 1}$.

2. On écrit $2\,018 = 224 \times 9 + 2$ donc $-2\,018 = (-224) \times 9 - 2 = (-224) \times 9 - 9 + 9 - 2 = (-225) \times 9 + 7$ et $0 \leqslant 7 < 9$ donc $\boxed{r = 7}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, $3^n - 1 = 3 \times 3^{n-1} - 1 = 3 \times 3^{n-1} - 3^{n-1} + 3^{n-1} - 1 = 2 \times 3^{n-1} + 3^{n-1}$ et, comme $n \geqslant 1$, $0 \leqslant 3^{n-1} - 1 < 3^{n-1}$ donc $\boxed{r = 3^{n-1} - 1}$.

Exercice 2.

1. On a $a_0 = 3^3 - 26 \times 0 - 27 = 0 = 0 \times 169$, $a_1 = 3^6 - 26 - 27 = 676 = 4 \times 169$ et $a_2 = 3^9 - 26 \times 2 - 27 = 19\,604 = 116 \times 169$ donc ces trois entiers sont tous divisibles par 169.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, en remarquant que $27 = 3^3$,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 27a_n &= 3^{3(n+1)+3} - 26(n+1) - 27 - 3^3(3^{3n+3} - 26n - 27) \\ &= 3^{3n+6} - 26n - 53 - 3^{3n+6} + 702n + 729 \\ &= 676n + 676 \end{aligned}$$

soit $\boxed{a_{n+1} - 27a_n = 676(n+1)}$.

3. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « 169 divise a_n ».
On a vu que 169 divise a_0 donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.
Alors, 169 divise a_k et, comme $676 = 4 \times 169$, 169 divise 676. Ainsi, 169 divise toute combinaison linéaire de a_k et 676. En particulier, 169 divise $27a_k + 676(k+1)$ qui est égal à a_{k+1} d'après la question précédente. Ainsi, 169 divise a_{k+1} donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
On a donc montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ 169 divise } a_n}$.

Exercice 3.

1. **a.** Par définition, $u_1 = 3u_0 - 4v_0 = 3 \times 1 - 4 \times (-1) = 7$ et $v_1 = -3u_0 + 7v_0 = -3 \times 1 + 7(-1) = -10$. Ainsi, $\boxed{u_1 = 7 \text{ et } v_1 = -10}$.

   b. Les diviseurs de 7 sont -7, -1, 1 et 7 et parmi ceux-ci seuls -1 et 1 divise 10. Ainsi, <u>les entiers relatifs qui divisent à la fois u_1 et v_1 sont -1 et 1</u>.

2. **a.** Par définition, $t_0 = 3u_0 + 2v_0 = 3 \times 1 + 2(-1)$ i.e. $\boxed{t_0 = 1}$.

   b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= 3u_{n+1} + 2v_{n+1} = 3(3u_n - 4v_n) + 2(-3u_n + 7v_n) \\ &= 9u_n - 12v_n - 6u_n + 14v_n = 3u_n + 2v_n = t_n. \end{aligned}$$

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = t_n$ donc $\boxed{(t_n) \text{ est constante}}$.

3. Soit d un entier qui divise à la fois u_n et v_n. Alors, d divise toute combinaison linéaire de u_n et v_n et, en particulier, d divise $t_n = 1$. Ainsi, $d = -1$ ou $d = 1$. Réciproquement, 1 et -1 divise tous les entiers donc ils divisent u_n et v_n.

   On conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des entiers qui divisent à la fois } u_n \text{ et } v_n \text{ est } \{-1, 1\}}$.

Exercice 4. — Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $n^2 + 1 = (n-1)(n+1) + 2$. Si $n \geqslant 2$, $0 \leqslant 2 < n+1$ donc le reste dans la division euclidienne de $n^2 + 1$ par $n + 1$ est $2 \neq 0$ donc $n + 1$ ne divise pas $n^2 + 1$. Si $n = 0$ alors $n + 1 = 1$ divise $n^2 + 1 = 1$ et si $n = 1$ alors $n + 1 = 2$ divise $n^2 + 1 = 2$.

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des entiers naturels } n \text{ tels que } n+1 \text{ divise } n^2+1 \text{ est } \{0, 1\}}$.