Devoir surveillé n°1

Durée : 1 heure

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Questions de cours. (3 points) — Soit x, y et z trois entiers.

1. Rappeler la définition de « x divise y ».

2. Démontrer que si x divise y et x divise z alors, pour tout $(u\,;v) \in \mathbb{Z}^2$, x divise $uy + vz$.

3. Démontrer que si x divise y et y divise z alors x divise z.

Exercice 1. (4 points) — Dans chaque cas, déterminer le reste r dans la division euclidienne de A par B.

1. $A = 2\,017$ et $B = 28$;

2. $A = -2\,018$ et $B = 9$;

3. $A = 3^n - 1$ et $B = 3^{n-1}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2. (5 points) — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = 3^{3n+3} - 26n - 27.$$

1. Calculer a_0, a_1 et a_2 et montrer que ces trois entiers sont tous divisibles par 169.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - 27a_n = 676(n + 1)$.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 169 divise a_n.

Exercice 3. (6 points) — On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 1,\ v_0 = -1 \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - 4v_n \\ v_{n+1} = -3u_n + 7v_n \end{cases}.$$

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n sont des entiers.

1. **a.** Calculer u_1 et v_1.

b. Quels sont les entiers relatifs qui divisent à la fois u_1 et v_1 ?

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = 3u_n + 2v_n$.

a. Calculer t_0.

b. Démontrer que la suite (t_n) est constante.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs qui divisent à la fois u_n et v_n.

Exercice 4. (2 points) — Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $n + 1$ divise $n^2 + 1$.