Correction du devoir surveillé n°1

Exercice 1.

1. **a.** « c divise a » signifie qu'il existe un entier k tel que $a = kc$.

   b. Supposons que c divise a et b. Alors, il existe des entiers k et k' tels que $a = kc$ et $b = k'c$ donc $ua + vb = u(kc) + v(k'c) = (uk + vk')c$. Comme $uk + vk'$ est un entier, on en déduit que c divise $ua + vb$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $n + 5$ divise $2n + 3$. Alors, $n + 5$ divise $2n + 3$ et $n + 5$ donc $n + 5$ divise $2(n + 5) - (2n + 3) = 7$ i.e. $n + 5 \in \{-7, -1, 1, 7\}$ soit $n \in \{-12, -6, -4, 2\}$. Comme $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que $n = 2$.

   Réciproquement, si $n = 2$ alors $n + 5 = 7$ et $2n + 3 = 7$ donc $n + 5$ divise $2n + 3$.

   On conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des entiers naturels } n \text{ tels que } n + 5 \text{ divise } 2n + 3 \text{ est } \{2\}}$.

3. **a.** On a $A_2 = 4 \times 2 + 1 = 9$ et $B_2 = 3 \times 2 + 2 = 8$ donc l'ensemble des diviseurs positifs de A_2 est $\{1, 3, 9\}$ et l'ensemble des diviseurs positifs de B_2 est $\{1, 2, 4, 8\}$. Le seul diviseur positif commun à A_2 et B_2 est 1 donc $\boxed{d_2 = 1}$.

   b. Comme d_m divise A_m et B_m, d_m divise $4B_m - 3A_m = 4(3m + 2) - 3(4m + 1) = 5$. Il s'ensuit, comme $d_m \in \mathbb{N}$, que $\boxed{d_m = 1 \text{ ou } d_m = 5}$.

   c. Supposons que 5 divise m. Alors, il existe un entier k tel que $m = 5k$ et donc $A_m = 4(5k) + 1 = 20k + 1$. Si $d_m = 5$ alors 5 divise A_m donc, comme 5 divise 20, 5 divise $A_m - 20k$ i.e. 5 divise 1. C'est absurde donc $d_m \neq 5$. On déduit alors de la question b. que $d_m = 1$. Ainsi, $\boxed{\text{la proposition (P) est vraie}}$.

   d. La proposition (P') est : « pour tout $m \in \mathbb{Z}$, si $d_m = 1$ alors 5 divise m ». Cette proposition est fausse car on a vu dans la question a. que $d_2 = 1$ et pourtant 5 ne divise pas 2.

Exercice 2.

1. Puisque $1\,789 = 14 \times 127 + 11$, $\boxed{r = 11}$.
2. Puisque $-2\,017 = 11 \times (-184) + 7$, $\boxed{r = 7}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $n^2 + 2n + 3 = n(n + 1) + n + 3 = n(n + 1) + n + 1 + 2 = (n + 1)^2 + 2$. Si $n \geqslant 2$, $0 \leqslant 2 < n + 1$ donc $r = 2$. Si $n = 0$ alors $A = 3$ et $B = 1$ donc B divise A et $r = 0$ et si $n = 1$ alors $A = 6$ et $B = 2$ donc, de même, $r = 0$.

   Finalement, $\boxed{r = 0 \text{ si } n \leqslant 1 \text{ et } r = 2 \text{ si } n \geqslant 2}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $5n + 1 = 2(2n + 1) + n - 1$. Or, $0 \leqslant n - 1 < 2n + 1$ si et seulement si $n \geqslant 1$ donc, pour tout $n \geqslant 1$, $r = n - 1$. Si $n = 0$, $A = 1$ et $B = 1$ donc $r = 0$.

   Finalement, $\boxed{r = 0 \text{ si } n = 0 \text{ et } r = n - 1 \text{ si } n \geqslant 1}$.

Exercice 3.

1. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} 16a_n + 15 &= 16\left(4^{2n+2} - 1\right) + 15 = 16 \times 4^{2n+2} - 16 + 15 \\ &= 4^2 \times 4^{2n+2} - 1 = 4^{2n+4} - 1 = 4^{2(n+1)+2} - 1 = a_{n+1} \end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 16a_n + 15}$.

b. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition P_n : « 5 divise a_n ».
$a_0 = 4^2 - 1 = 15$ donc P_0 est vraie.
Supposons que P_k est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.
Alors, 15 divise a_k et 15 divise 15 donc 15 divise $16a_k + 15 = a_{k+1}$. Ainsi, P_{k+1} est vraie et on a prouvé par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 15|a_n}$.

2. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= 4^{2(n+1)+2} - 15(n+1) - 16 - \left[4^{2n+2} - 15n - 16\right] = 4^{2n+4} - 4^{2n+2} - 15 \\ &= 4^2 \times 4^{2n+2} - 4^{2n+2} - 15 = 15 \times 4^{2n+2} - 15 = 15\left[4^{2n+2} - 1\right] \\ &= 15a_n. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} - b_n = 15a_n}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que $b_0 = 4^2 - 15 \times 0 - 16 = 0$ donc 225 divise b_0.
Si $n \geqslant 1$ alors, comme $b_0 = 0$,

$$b_n = b_n - b_{n-1} + b_{n-1} - b_{n-2} + b_{n-2} - \cdots + b_2 - b_1 + b_1 - b_0 = \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 15a_k.$$

Or, d'après la question 1.b., pour tout $k \in \mathbb{N}$, 15 divise a_k donc $15^2 = 225$ divise $15a_k$.
On en déduit que 225 divise la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 15a_k$ i.e. 225 divise b_n.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 225 \text{ divise } b_n}$.

Autre méthode. — Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition Q_n : « 225 divise b_n ».
Comme $b_0 = 0$, Q_0 est vraie.
Supposons que Q_k est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$
Alors, d'après la question 1.b., 15 divise a_k donc $15^2 = 225$ divise $15a_k$. Dès lors, 225 divise $b_k + 15a_k = b_{k+1}$ d'après la question précédente. Ainsi, Q_{k+1} est vraie et on a montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 225 \text{ divise } b_n}$.