Correction du devoir surveillé n°1

Exercice 1.

1. On dit que b divise a s'il existe un entier k tel que $a = kb$.
2. Soit a, b et c trois entiers tels que a et b divisent c. Alors, il existe deux entiers k et k' tels que $c = ka$ et $c = kb$ donc $c^2 = c \times c = (ka) \times (k'b) = kk'(ab)$. Comme kk' est entier, on en déduit que $\boxed{ab \text{ divise } c^2}$.
3. La réciproque de la propriété précédente est « si ab divise c^2 alors a divise c et b divise c ». Celle-ci est fausse. Par exemple, pour $a = 4$, $b = 9$ et $c = 6$ alors $ab = 36 = c^2$ donc ab divise c^2 pourtant ni a ni b ne divise c.

Exercice 2.

1. Soit un entier naturel n tel que $2n + 3$ divise 19. Alors, $2n + 3$ vaut 1 ou 19 donc $n = -1$ ou $n = 8$. Comme $n \geq 0$, $n = 8$. Réciproquement, si $n = 8$ alors $2n + 3 = 19$ divise bien 19. Ainsi, l'ensemble des entiers n tels que $2n + 3$ divise 19 est $\{8\}$.
2. Soit un entier naturel n. Alors,

$$19 \mid n + 5 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ n + 5 = 19k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ n = -5 + 19k.$$

   De plus,

$$-5 + 19k \geq 0 \Leftrightarrow 19k \geq 5 \Leftrightarrow k \geq 1 \text{ (car } k \text{ est entier).}$$

   Ainsi, l'ensemble des entiers naturels n tels que $n + 5$ divise 19 est $\{-5 + 19k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$.
3. Soit un entier naturel n tel que $n + 5$ divise $2n + 3$. Alors, comme $n + 5$ divise $n + 5$, $n + 5$ divise $2(n + 5) - (2n + 3) = 7$. Ainsi, $n + 5$ est un diviseur de 7 et comme $n \in \mathbb{N}$, $n + 5 \geq 5$ donc $n + 5 = 7$ soit $n = 2$. Réciproquement, si $n = 2$ alors $n + 5 = 7$ divise $2n + 3 = 7$. On conclut que l'ensemble des entiers n tels que $2n + 3$ divise 19 est $\{2\}$.

Exercice 3.

1. Par définition, $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{5}$ donc $\dfrac{y + x}{xy} = \dfrac{1}{5}$ et ainsi, par les produits en croix, $5(x + y) = xy$. On en déduit que $xy - 5x - 5y = 0$ donc $xy - 5x - 5y + 25 = 25$. Or, $(x - 5)(y - 5) = xy - 5x - 5y + 25$ donc $\boxed{(x - 5)(y - 5) = 25}$.
2. L'ensemble des diviseurs de 25 dans $\mathbb{Z}$ est $\boxed{\{-25, -5, -1, 1, 5, 25\}}$.
3. Soit $(x\,;y)$ une solution de (E). Alors, d'après la question 1, $(x - 5\,;y - 5)$ est un couple de diviseurs de 25. Comme $x \leq y$, on a également $x - 5 \leq y - 5$ donc $(x - 5\,;y - 5)$ est l'un des couples $(-25\,;-1)$, $(-5\,;-5)$, $(1\,;25)$ ou $(5\,;5)$. Il s'ensuit que $(x\,;y)$ est l'un des couples $(-20\,;4)$, $(0\,;0)$, $(6\,;30)$ ou $(10\,;10)$.

   Réciproquement, parmi les 4 solutions possibles, $(0\,;0)$ ne convient pas car, pour que (E) ait un sens, il faut que $xy \neq 0$. En revanche, $\dfrac{1}{-20} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{30} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{5}$.

   On conclut donc que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions } (x\,;y) \text{ de (E) avec } x \leq y \text{ est } \{(-20\,;4)\,;(6\,;30)\,;(10\,;10)\}}$.

Exercice 4.

1. Par théorème, $r = 0$ si et seulement si b divise a.
2. On commence par remarquer que $a - n^2b = n^3 + 2n + 4 - n^2(n+1) = -n^2 + 2n + 4$ donc $a - n^2b + nb = -n^2 + 2n + 4 + n(n+1) = 3n + 4$ et finalement $a - n^2b + nb - 3b = 3n + 4 - 3(n+1) = 1$. Ainsi, $a - (n^2 - n + 3)b = 1$ soit $a = (n^2 - n + 3)b + 1$.

   Si $n \geq 1$ alors $b = n + 1 \geq 2$ donc $0 \leq 1 < b$ et l'écriture $a = (n^2 - n + 3)b + 1$ est la division euclidienne de a par b donc $r = 1$.

   Si $n = 0$ alors $a = 4$ et $b = 1$ donc $r = 0$ car 1 divise 4.
3. Ecrivons la division euclidienne de a par b : $a = bq + r$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r < b$. Remarquons que $q \neq 0$ sinon $a = r < b$ ce qui est exclu par l'énoncé puisque $a \geq b$. Ainsi, $q \geq 1$. Dès lors, comme $b > 0$, $qb \geq b > r$ donc $a = bq + r > r + r$ soit $\boxed{a > 2r}$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. En développant,

$$(x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{q-1}) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^q - (1 + x + x^2 + \cdots + x^{q-1})$$

   donc les termes s'annulent 2 à 2 sauf -1 et x^q. Ainsi, $(x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{q-1}) = x^q - 1$.
5. Ecrivons la division euclidienne de a par b : $a = bq + r$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r < b$. Alors,

$$2^a - 1 = 2^{bq+r} - 1 = 2^{bq}2^r - 1 = \left(2^b\right)^q \times 2^r - 2^r + 2^r - 1 = 2^r \left[\left(2^b\right)^q - 1\right] + 2^r - 1$$

   En appliquant la question 1 avec $x = 2^b$, il s'ensuit que

$$2^a - 1 = 2^r(2^b - 1)\left(1 + 2^b + 2^{2b} + \cdots + 2^{(q-1)b}\right) + 2^r - 1$$

   c'est-à-dire

$$[*] \quad 2^a - 1 = \left[2^r\left(1 + 2^b + 2^{2b} + \cdots + 2^{(q-1)b}\right)\right](2^b - 1) + 2^r - 1.$$

   Or, $2^r\left(1 + 2^b + 2^{2b} + \cdots + 2^{(q-1)b}\right)$ est un entier (car, comme on l'a vu plus haut, $q \geq 1$ donc $q - 1 \geq 0$) et, comme $0 \leq r < b$, $1 \leq 2^r < 2^b$ et donc $0 \leq 2^r - 1 < 2^b - 1$.

   On conclut donc que l'égalité [*] est la division euclidienne de $2^a - 1$ par $2^b - 1$ et ainsi <u>le reste dans la division de $2^a - 1$ par $2^b - 1$ est $2^r - 1$</u>.