Terminales S3&4 – spécialité mathématiques mercredi 8 octobre 2014

Devoir surveillé n°1

Durée : 1 heure

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Exercice 1. (5 points)

1. Soit a et b deux entiers. Rappeler la définition de « b divise a ».
2. Montrer que, pour tous entiers a, b et c, si a et b divisent c alors ab divise c^2.
3. La réciproque de la propriété précédente est-elle vraie ?

Exercice 2. (5 points)

1. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $2n+3$ divise 19.
2. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que 19 divise $n+5$.
3. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $n+5$ divise $2n+3$.

Exercice 3. (5 points). — Le but de l'exercice est de résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5}$ d'inconnue $(x\,;y)$ avec $x \leq y$.

1. Soit $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2$ une solution de (E). Démontrer que $(x-5)(y-5)=25$.
2. Donner (sans justification) l'ensemble des diviseurs de 25 dans $\mathbb{Z}$.
3. En déduire l'ensemble des solutions $(x\,;y)$ de (E) dans $\mathbb{Z}^2$ telles que $x \leq y$.

Exercice 4. (5 points). — Dans tout l'exercice, a et b désignent des entiers tels que $0 < b \leq a$ et on note r le reste dans la division euclidienne de a par b.

Les quatre questions de l'exercice sont indépendantes.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $r=0$?
2. Dans cette question uniquement, on considère un entier naturel n et on suppose que $a=n^3+2n+4$ et $b=n+1$. Déterminer r.
3. On considère à nouveau deux entiers a et b quelconques tels que $0 < b \leq a$. Démontrer que $a > 2r$.
4. (Facultatif)
   - **a.** Démontrer que, pour tout réel x et tout entier $q \in \mathbb{N}^*$, $(x-1)(1+x+\cdots+x^{q-1}) = x^q - 1$.
   - **b.** Démontrer que le reste dans la division euclidienne de 2^a-1 par 2^b-1 est 2^r-1.