

Correction du devoir à la maison n°6

Questions préliminaires

1. *Remarque.* — Il y avait une erreur dans le sujet. L'égalité proposée n'est pas vraie pour $n = 0$. Il fallait donc l'établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et non tout $n \in \mathbb{N}$.

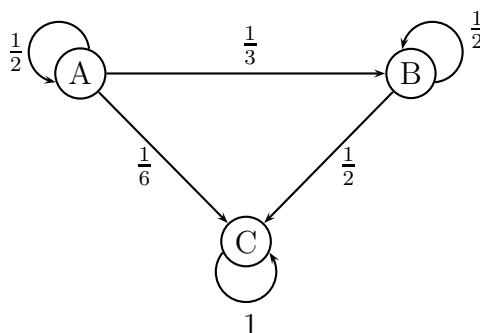
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\frac{n}{2^n} = \frac{e^{\ln(n)}}{e^{n \ln(2)}} = \exp(\ln(n) - n \ln(2)) = \exp\left(n \left[\frac{\ln(n)}{n} - \ln(2)\right]\right).$$

2. Par théorème, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(n)}{n} - \ln(2)\right] = -\ln(2)$. Étant donné que $-\ln(2) < 0$, il s'ensuit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left[\frac{\ln(n)}{n} - \ln(2)\right] = -\infty$. Or, $\lim_{X \rightarrow -\infty} \exp(X) = 0$ donc, par composition, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(n \left[\frac{\ln(n)}{n} - \ln(2)\right]\right) = 0$. Ainsi, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n} = 0}$.

Partie A

1. On peut traduire l'énoncé par le graphe probabiliste suivant.



2. La matrice de transition associée à ce graphe est $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Par théorème, $P_4 = P_0 M^4$ donc, à l'aide de la calculatrice, on trouve que l'état probabiliste au bout de 4 semaines est $\boxed{P_4 \approx (0,06 \quad 0,17 \quad 0,77)}$.
4. On souhaite étudier l'évolution à long terme de la propagation de la maladie au sein de la population.

a. Considérons la proposition $H_n : \ll M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \frac{n}{3 \times 2^{n-1}} & 1 - \frac{2n+3}{3 \times 2^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 1 - \frac{1}{2^n} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \gg$ où $n \in \mathbb{N}$.

Puisque $\begin{pmatrix} \frac{1}{2^0} & \frac{0}{3 \times 2^{-1}} & 1 - \frac{3}{3 \times 2^0} \\ 0 & \frac{1}{2^0} & 1 - \frac{1}{2^0} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 = M^0$, la proposition H_0 est vraie.

Supposons que H_k est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} M^{k+1} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2^k} & \frac{k}{3 \times 2^{k-1}} & 1 - \frac{2k+3}{3 \times 2^k} \\ 0 & \frac{1}{2^k} & 1 - \frac{1}{2^k} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{k+1}} & \frac{1}{3 \times 2^k} + \frac{k}{3 \times 2^k} & \frac{1}{6 \times 2^k} + \frac{k}{3 \times 2^k} + 1 - \frac{2k+3}{3 \times 2^k} \\ 0 & \frac{1}{2^{k+1}} & \frac{1}{2^{k+1}} + 1 - \frac{1}{2^k} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{k+1}} & \frac{k+1}{3 \times 2^k} & \frac{1+2k-2(2k+3)}{3 \times 2^{k+1}} + 1 \\ 0 & \frac{1}{2^{k+1}} & \frac{1-2}{2^{k+1}} + 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{k+1}} & \frac{k+1}{3 \times 2^k} & 1 - \frac{2k+5}{3 \times 2^{k+1}} \\ 0 & \frac{1}{2^{k+1}} & 1 - \frac{1}{2^{k+1}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, H_{k+1} est vraie et on a démontré par récurrence que H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. La question précédente montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice M^n contient de 0 donc le théorème du cours ne peut s'appliquer.

c. Par théorème, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = P_0 M^n$ donc

$$P_n = \begin{pmatrix} 0,999 \times \frac{1}{2^n} & 0,999 \times \frac{n}{3 \times 2^{n-1}} & 0,999 \left(1 - \frac{2n+3}{3 \times 2^n} \right) + 0,001 \end{pmatrix}$$

soit

$$P_n = \begin{pmatrix} \frac{0,999}{2^n} & \frac{0,333n}{2^{n-1}} & 1 - 0,333\frac{2n+3}{2^n} \end{pmatrix}$$

- d. Comme $2 > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = \infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{0,999}{2^n} = 0$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{0,333n}{2^{n-1}} = 0,666\frac{n}{2^n}$ donc, d'après la question préliminaire, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,666\frac{n}{2^n} = 0$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est un état probabiliste, la somme de ses coefficients est égale à 1 donc si deux de ses suites de coefficients tendent vers 0, la troisième tend vers 1. Ainsi, (P_n) converge la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ceci signifie qu'à long terme tout la population va être malade et infecté par le virus.

Partie B

1. a. Comme N ne contient pas de 0, par théorème, (Q_n) converge vers l'unique état stable Q du système.
- b. En calculant Q_{99} à l'aide de la calculatrice, on constate que $Q_{99} \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
On conjecture que l'état stable du système est $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ (qui est bien un état probabiliste).
Or, on vérifie par le calcul que $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ donc cet état est bien stable. Par unicité, on en déduit que $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
- c. On en déduit qu'à long terme, environ $\frac{1}{3}$ des individus sont sains, $\frac{1}{3}$ sont porteurs sains et $\frac{1}{3}$ sont malades. Ainsi, si la découverte du vaccin contient la propagation du virus, elle ne permet pas l'éradication de la maladie.
2. a. À l'aide de la calculatrice, on vérifie que $N^2 = \frac{1}{3}J$.
- b. Considérons la proposition $R_n : \ll N^n = N^2 \gg$ pour $n \geq 2$.
La proposition R_2 est vraie par définition. Supposons que R_k est vraie pour un certain entier $k \geq 2$. Alors, $N^{k+1} = N^k N = N^2 N = \frac{1}{3}JN$. Or, à l'aide de la calculatrice, on vérifie que $NJ = J$ donc $N^{k+1} \frac{1}{3}J = N^2$.
Ainsi, R_{k+1} est vraie et on a démontré par récurrence que, pour tout entier $n \geq 2$, $N^n = N^2$.
- c. Par théorème, pour tout entier $n \geq 2$, $Q_n = Q_0 N^n$ donc $Q_n = Q_0 N^2$. On en déduit, à l'aide de la calculatrice, que, $\text{pour tout entier } n \geq 2, Q_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
- d. Ainsi, à partir du rang 2, la suite (Q_n) est constante égale à Q donc la répartition des individus est stable avec une équirépartition entre les trois états. On retrouve, en particulier, le résultat de la question 1.