

Devoir à la maison n°6

À rendre le mercredi 4 mai 2016

Dans une population donnée, on s'intéresse à l'évolution d'une maladie contagieuse due à un virus. Un individu de la population peut être dans l'un des trois états suivants :

- A : « l'individu est sain, c'est-à-dire qu'il n'est ni malade ni infecté par le virus »,
- B : « l'individu est porteur sain, c'est-à-dire qu'il n'est pas malade mais qu'il est infecté par le virus »,
- C : « l'individu est malade et infecté par le virus ».

Questions préliminaires

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{2^n} = \exp\left(n \left[\frac{\ln(n)}{n} - \ln(2)\right]\right)$.
2. En déduire la limite de $\frac{n}{2^n}$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

Partie A. — Dans cette partie, on fait les hypothèses suivantes :

- la probabilité qu'un individu sain devienne porteur sain est égale à $\frac{1}{3}$ et la probabilité qu'il devienne malade est égale à $\frac{1}{6}$;
- la probabilité qu'un porteur sain devienne malade est égale à $\frac{1}{2}$ et il reste, dans tous les cas, infecté par le virus.

On note $P_n = (a_n \quad b_n \quad c_n)$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines où a_n, b_n et c_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain ou malade la n -ième semaine.

On suppose de plus que $P_0 = (0,999 \quad 0 \quad 0,001)$.

1. Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un graphe probabiliste.
2. Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe.
3. Déterminer l'état probabiliste P_4 au bout de quatre semaines. On donnera des valeurs arrondies à 10^{-2} près.
4. On souhaite étudier l'évolution à long terme de la propagation de la maladie au sein de la population.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \frac{n}{3 \times 2^{n-1}} & 1 - \frac{2n+3}{3 \times 2^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 1 - \frac{1}{2^n} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. Peut-on, ici, appliquer le théorème du cours assurant que la suite des états probabilistes (P_n) converge vers un unique état stable ?

c. Dédurre de la question a., pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de P_n en fonction de n .

d. Montrer que (P_n) converge vers une matrice P que l'on déterminera.

Interpréter le résultat obtenu.

Partie B. — En réalité, au bout de 4 semaines de travail, des chercheurs mettent au point un vaccin qui permet d'enrayer la propagation du virus.

Après vaccination, on suppose que l'évolution hebdomadaire de la maladie est donnée par la matrice de transition

$$N = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Q_n la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines après la mise en place de ces nouvelles mesures de vaccination.

D'après les résultats de la partie A, $Q_0 = P_4$. Dans la suite, on prendra $Q_0 = (0,06 \quad 0,17 \quad 0,77)$ (les coefficients ayant été arrondis à 10^{-2} près).

1. a. En utilisant un théorème du cours, justifier que la suite (Q_n) converge vers l'unique état stable Q du système.

b. Déterminer Q .

c. Donner une interprétation des résultats obtenus. En particulier, la découverte du vaccin permettra-t-elle l'éradication de la maladie ?

2. On se propose dans cette question de retrouver le résultat de la question précédente directement (c'est-à-dire sans utiliser la convergence vers l'état stable).

a. On note J la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Démontrer qu'il existe un réel k tel que $N^2 = kJ$.

b. En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$, $N^n = N^2$.

c. Déterminer, pour tout entier $n \geq 2$, l'expression de Q_n en fonction de n .

d. Conclure.