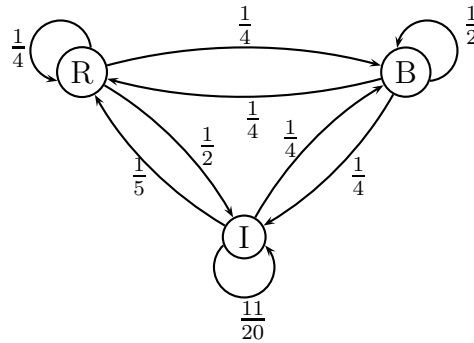


Corrigé du devoir à la maison n°5

1. La probabilité qu'un joueur isolé reste isolé d'un jour sur l'autre est $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ i.e. $\frac{11}{20}$.
2. a. On peut représenter la situation par le graphe probabiliste suivant :



- b. La matrice de transition est $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{11}{20} \end{pmatrix}$.
 - c. La suite (P_n) est une suite géométrique de matrices lignes de raison M donc, par propriété, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = P_0 M^n$.
 - d. L'état probabiliste au bout d'une semaine est $P_7 = P_0 M^7$ sachant que $P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $P_7 \approx \begin{pmatrix} 0,228 & 0,333 & 0,439 \end{pmatrix}$.
3. a. À l'aide de la calculatrice, on obtient $PM = \begin{pmatrix} 156 & 228 & 300 \end{pmatrix}$. Ainsi, $PM = P$.
 - b. La matrice P n'est pas un état probabiliste. Considérons la matrice P' obtenue à partir de P en divisant par la somme de ses coefficients $156 + 228 + 300 = 684$ i.e. $P' = \begin{pmatrix} \frac{156}{684} & \frac{228}{684} & \frac{300}{684} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{57} & \frac{1}{3} & \frac{25}{57} \end{pmatrix}$. Par définition, P' est un état probabiliste et il est stable par $P'M = (\frac{1}{684}P)M = \frac{1}{684}(PM) = \frac{1}{684}P = P'$.
Ainsi, $P' = \begin{pmatrix} \frac{13}{57} & \frac{1}{3} & \frac{25}{57} \end{pmatrix}$ est un état probabiliste stable.
 - c. Comme la matrice M ne contient pas de 0, la suite (P_n) converge vers l'unique état probabiliste stable i.e. vers P' . Ainsi, à long terme, la probabilité qu'un joueur pris au hasard fasse partie de l'équipe rouge est $\frac{13}{57}$, qu'il fasse partie de l'équipe bleue est $\frac{1}{3}$ et qu'il soit isolé est $\frac{25}{57}$.
 4. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, puisque $P_{n+1} = P_n M$, on a le système

$$\begin{cases} r_{n+1} = \frac{1}{4}r_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{5}i_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{4}r_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}i_n \\ i_{n+1} = \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{11}{20}i_n \end{cases}.$$

De plus, $r_n + b_n + i_n = 1$ donc $i_n = 1 - r_n - b_n$. Ainsi, en remplaçant dans les deux premières égalités, il vient :

$$\begin{cases} r_{n+1} = \frac{1}{4}r_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{5}(1 - r_n - b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{4}r_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}(1 - r_n - b_n) \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} r_{n+1} = \frac{1}{20}r_n + \frac{1}{20}b_n + \frac{1}{5} \\ b_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4} \end{cases}$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$V_{n+1} = \begin{pmatrix} r_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{20}r_n + \frac{1}{20}b_n + \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{20}r_n + \frac{1}{20}b_n \\ \frac{1}{4}b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en posant $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = AV_n + B$.

c. Pour toute matrice colonne X de taille 2×1 ,

$$X = AX + B \Leftrightarrow X - AX = B \Leftrightarrow (I_2 - A)X = B.$$

Or le déterminant de la matrice $I_2 - A = \begin{pmatrix} \frac{19}{20} & -\frac{1}{20} \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ est $\frac{19}{20} \times \frac{3}{4} - 0 \times (-\frac{1}{20}) = \frac{57}{80} \neq 0$ donc $I_2 - A$ est inversible et

$$(I_2 - A)^{-1} = \frac{80}{57} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{20} \\ 0 & \frac{19}{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{19} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$X = AX + B \Leftrightarrow X = (I_2 - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{13}{57} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'unique matrice C telle que $C = AC + B$ est $C = \begin{pmatrix} \frac{13}{57} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

d. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$W_{n+1} = V_{n+1} - C = AV_n + B - (AC + B) = AV_n + B - AC - B = A(V_n - C)$$

i.e. $\boxed{W_{n+1} = AW_n}$. Ainsi, (W_n) est une suite géométrique de matrices colonnes de raison A donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = A^n W_0$ i.e. $V_n - C = A^n(V_0 - C)$. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, V_n = A^n(V_0 - C) + C}$.

e. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{20^n} & \frac{1}{4^{n+1}} - \frac{1}{4 \times 20^n} \\ 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}$ ».

On a $A^0 = I_2$ et $\begin{pmatrix} \frac{1}{20^0} & \frac{1}{4^1} - \frac{1}{4 \times 20^0} \\ 0 & \frac{1}{4^0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{1} \end{pmatrix} = I_2$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

Alors,

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k A = \begin{pmatrix} \frac{1}{20^k} & \frac{1}{4^{k+1}} - \frac{1}{4 \times 20^k} \\ 0 & \frac{1}{4^k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{20^{k+1}} & \frac{1}{20^{k+1}} + \left(\frac{1}{4^{k+1}} - \frac{1}{4 \times 20^k} \right) \times \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4^{k+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{20^{k+1}} & \frac{16}{16 \times 20^{k+1}} - \frac{20}{16 \times 20^{k+1}} + \frac{1}{4^{k+2}} \\ 0 & \frac{1}{4^{k+1}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{20^{k+1}} & \frac{1}{4^{k+2}} - \frac{4}{16 \times 20^{k+1}} \\ 0 & \frac{1}{4^{k+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{20^{k+1}} & \frac{1}{4^{k+2}} - \frac{1}{4 \times 20^{k+1}} \\ 0 & \frac{1}{4^{k+1}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie et on a démontré par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

f. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} V_n &= \begin{pmatrix} \frac{1}{20^n} & \frac{1}{4^{n+1}} - \frac{1}{4 \times 20^n} \\ 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 - \frac{13}{57} \\ 0 - \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{13}{57} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} \frac{1}{20^n} & \frac{1}{4^{n+1}} - \frac{1}{4 \times 20^n} \\ 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{13}{57} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{13}{57} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{13}{57} - \frac{13}{57 \times 20^n} - \frac{1}{3 \times 4^{n+1}} + \frac{1}{12 \times 20^n} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \times 4^n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i.e. $V_n = \begin{pmatrix} \frac{13}{57} - \frac{11}{76 \times 20^n} - \frac{1}{3 \times 4^{n+1}} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \times 4^n} \end{pmatrix}.$

g. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = \frac{13}{57} - \frac{11}{76 \times 20^n} - \frac{1}{3 \times 4^{n+1}} = \frac{13}{57} - \frac{11}{76} \times \left(\frac{1}{20}\right)^n - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$ et $b_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$. Comme $\frac{1}{20}$ et $\frac{1}{4}$ sont strictement compris entre -1 et 1 , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{20}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \frac{13}{57}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{1}{3}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i_n = 1 - r_n - b_n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{13}{57} - \frac{1}{3} = \frac{25}{57}$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \begin{pmatrix} \frac{13}{57} & \frac{1}{3} & \frac{25}{57} \end{pmatrix}$ et on retrouve donc le résultat de la question **3.c.**