

Devoir à la maison n°5

À rendre le vendredi 4 mai 2018

On considère un jeu en ligne. Dans celui-ci, chaque joueur peut choisir entre 3 statuts :

- faire partie de l'équipe bleu ;
- faire partie de l'équipe rouge ;
- rester un joueur isolé ne faisant partie d'aucune équipe.

Chaque jour, chaque joueur peut changer de statut mais ne peut pas se retirer du jeu. Une étude statistique a permis de montrer que, d'un jour sur l'autre,

- $\frac{1}{4}$ des joueurs de l'équipe rouge rejoignent l'équipe bleue, $\frac{1}{2}$ des joueurs de l'équipe rouge deviennent des joueurs isolés et les autres restent dans l'équipe rouge ;
- $\frac{1}{4}$ des joueurs de l'équipe bleue rejoignent l'équipe rouge, $\frac{1}{4}$ des joueurs de l'équipe bleue deviennent des joueurs isolés et les autres restent dans l'équipe bleue ;
- $\frac{1}{5}$ des joueurs isolés rejoignent l'équipe rouge, $\frac{1}{4}$ des joueurs isolés rejoignent l'équipe bleue et les autres restent des joueurs isolés.

Au début du jeu, à la clôture des inscriptions, tous les joueurs sont des joueurs isolés.

On note $P_n = \begin{pmatrix} r_n & b_n & i_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste des statuts d'un joueur au bout de n jours. Ainsi, r_n est la probabilité d'être dans l'équipe rouge, b_n celle d'être dans l'équipe bleue et i_n celle d'être un joueur isolé, après n jours de jeu.

On a donc : $r_0 = 0$, $b_0 = 0$ et $i_0 = 1$.

1. Déterminer la probabilité qu'un joueur isolé reste isolé d'un jour sur l'autre.
2. **a.** Représenter la situation par un graphe probabiliste à trois états : R : « être dans l'équipe rouge », B : « être dans l'équipe bleue » et I : « être un joueur isolé ».
- b.** Déterminer la matrice de transition M associée à ce graphe en ordonnant les sommets dans l'ordre R , B et I de sorte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = P_n M$.
- c.** Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = P_0 M^n$.
- d.** Déterminer l'état probabiliste au bout d'une semaine, en arrondissant au millième.
3. On pose $P = \begin{pmatrix} 156 & 228 & 300 \end{pmatrix}$.
 - a.** Donner, sans détailler les calculs, le produit matriciel PM . Que constate-t-on ?
 - b.** En déduire un état probabiliste qui reste stable d'un jour sur l'autre.
 - c.** À long terme, quelles sont les probabilités qu'un joueur pris au hasard fasse partie de l'équipe rouge, de l'équipe bleue ou soit isolé ? On justifiera avec soin sa réponse.

4. On propose de retrouver le résultat précédent d'une autre manière.

a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} r_{n+1} = \frac{1}{20}r_n + \frac{1}{20}b_n + \frac{1}{5} \\ b_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4} \end{cases}.$$

b. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \begin{pmatrix} r_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice carrée A d'ordre 2 et la matrice colonne B telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = AV_n + B$.

c. Démontrer qu'il existe une unique matrice colonne C telle que $C = AC + B$ et la déterminer.

d. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = V_n - C$.

Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, W_{n+1} en fonction de A et W_n puis en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de V_n en fonction de A , V_0 , C et n .

e. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{20^n} & \frac{1}{4^{n+1}} - \frac{1}{4 \times 20^n} \\ 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}.$$

f. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de V_n en fonction de n .

g. Retrouver les résultats de la question **3.c.**