

Devoir à la maison n°5

(version corrigée)

À rendre avant le vendredi 21 avril 2017 inclus

Exercice 1. — On cultive des bactéries dans une éprouvette. Celles-ci se reproduisent par fission binaire : une bactérie grandit puis se divise en deux nouvelles bactéries.

Pendant les 10 premières minutes de sa vie, une bactérie ne peut pas se reproduire : on dit qu'elle est en phase I. Pendant les 10 minutes suivantes, elle effectue sa division cellulaire pour produire deux nouvelles bactéries. Durant cette période de division, on dit que la bactérie est en phase D.

Initialement, l'éprouvette contient 500 bactéries en début de phase I et 100 bactéries en début de phase D.

De plus, au bout de 10 minutes, on ajoute dans l'éprouvette 300 bactéries en début de phase I et 50 bactéries en début de phase D et on répète cette opération toutes les 10 minutes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note i_n le nombre de bactéries en début de phase I au bout de $10n$ minutes et d_n le nombre de bactéries en début de phase D au bout de $10n$ minutes.

1. Préciser i_0 et d_0 puis calculer i_1 et d_1 .

2. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} i_n \\ d_n \end{pmatrix}$.

a. Déterminer une matrice A carrée d'ordre 2 et une matrice colonne B telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n + B$.

b. Déterminer une matrice colonne C telle que $C = AC + B$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Y_n = X_n - C$.

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+1} = AY_n$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Z_n = Y_{2n}$.

a. Démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = A^2 Z_n$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = 2Z_n$.

b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_{2n} = 2^n Y_0$ et $Y_{2n+1} = 2^n Y_1$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note N_n le nombre total de bactéries au bout de $10n$ minutes. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, N_{2n} et N_{2n+1} .

4. La reproduction des bactéries dans l'éprouvette ne peut continuer que si leur nombre total ne dépasse pas 1 000 000.

a. On donne l'algorithme suivant.

Variables :	N, p et n sont des entiers naturels.
Initialisation :	Demander à l'utilisateur la valeur de p .
Traitement :	Si p est pair Affecter à n la valeur $\frac{p}{2}$ Affecter à N la valeur Sinon Affecter à n la valeur $\frac{p-1}{2}$ Affecter à N la valeur Fin de Si.
Sortie :	Afficher N .

Compléter cet algorithme pour qu'il affiche en sortie le nombre total de bactéries dans l'éprouvette au bout $10p$ minutes.

- b. Écrire un algorithme qui affiche en sortie le temps T_0 , en minutes, au bout duquel la reproduction des bactéries ne sera plus possible dans l'éprouvette.
- c. Déterminer T_0 .

Exercice 2

1. Résoudre l'équation $(E) : 26x - 17y = 8$ d'inconnue $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$.
2. Un corps céleste C_1 est visible dans le ciel le mercredi 22 mars 2017. Un autre corps céleste C_2 est visible dans le ciel 8 jours après (c'est-à-dire le jeudi 30 mars 2017). On sait que le corps céleste C_1 est visible périodiquement tous les 26 jours et que le corps C_2 est visible périodiquement tous les 17 jours. Déduire de la question précédente la date précise (y compris le jour de la semaine – et sans utiliser de calendrier !) de la prochaine apparition simultanée des deux corps célestes C_1 et C_2 dans le ciel.

Exercice 3 (facultatif). — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit M la matrice associée à un graphe probabiliste à n états c'est-à-dire une matrice carrée d'ordre n à coefficients positifs telle que, sur chaque ligne, la somme des coefficients est égale à 1. On dit qu'un réel λ est une valeur propre de M s'il existe une matrice colonne non nulle X de taille $n \times 1$ telle que $MX = \lambda X$.

1. Démontrer que 1 est une valeur propre de M .
2. Démontrer que si λ est une valeur propre de M alors $|\lambda| \leq 1$.