

Corrigé du devoir à la maison n°5

Exercice 1

1. D'après l'énoncé, $i_0 = 500$ et $d_0 = 100$. Au bout de 10 minutes, les 500 bactéries initialement en phase I passe en phase D, les 100 bactéries initialement en phase D engendrent 200 bactéries en phase I. De plus, on introduit 300 bactéries en début de phase I et 50 bactéries en début de phase D donc $i_1 = 200 + 300 = 500$ et $d_1 = 500 + 50 = 550$.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par le même raisonnement que précédemment, on a $\begin{cases} i_{n+1} = 2d_n + 300 \\ d_{n+1} = i_n + 50 \end{cases}$ donc

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 2d_n + 300 \\ i_n + 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2d_n \\ i_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 300 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_n \\ d_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 300 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Dès lors, en posant $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 300 \\ 50 \end{pmatrix}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n + B$.

- b. Pour toute matrice colonne C de taille 2×1 ,

$$C = AC + B \Leftrightarrow C - AC = B \Leftrightarrow (I_2 - A)C = B.$$

Or, $I_2 - A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible car son déterminant est $\det(I_2 - A) = 1 \times 1 - (-1) \times (-2) = -1 \neq 0$ et son inverse est $(I_2 - A)^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
Dès lors, pour toute matrice colonne C de taille 2×1 ,

$$C = AC + B \Leftrightarrow C = (I_2 - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} -400 \\ -350 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'unique matrice colonne C telle que $C = AC + B$ est $C = \begin{pmatrix} -400 \\ -350 \end{pmatrix}$.

- c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $Y_{n+1} = X_{n+1} - C = AX_n + B - (AC + B) = A(X_n - C)$ donc $Y_{n+1} = AY_n$.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$Z_{n+1} = Y_{2(n+1)} = Y_{(2n+1)+1} = AY_{2n+1} = A(AY_{2n}) = A^2Y_{2n}$$

donc $Z_{n+1} = A^2Z_n$. Or, on vérifie que $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $Z_{n+1} = (2I_2)Z_n = 2(I_2Z_n)$ soit $Z_{n+1} = 2Z_n$.

- b. La suite (Z_n) est une suite géométrique de matrices de raison $2I_2$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = (2I_2)^n Z_0 = 2^n Z_0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_{2n} = 2^n Y_0$ et, par suite, $Y_{2n+1} = AY_{2n} = A(2^n Y_0) = 2^n (AY_0)$ soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_{2n+1} = 2^n Y_1$.

- c. On déduit de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{2n} - C = 2^n(X_0 - C)$ soit $X_{2n} = 2^n(X_0 - C) + C = \begin{pmatrix} 900 \times 2^n - 400 \\ 450 \times 2^n - 350 \end{pmatrix}$ i.e. $i_{2n} = 900 \times 2^n - 400$ et $d_{2n} = 450 \times 2^n - 350$. Comme $N_{2n} = i_{2n} + d_{2n}$, il s'ensuit que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, N_{2n} = 1350 \times 2^n - 750}$. De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{2n+1} - C = 2^n(X_1 - C)$ soit $X_{2n+1} = 2^n(X_1 - C) + C = \begin{pmatrix} 900 \times 2^n - 400 \\ 900 \times 2^n - 350 \end{pmatrix}$ i.e. $i_{2n+1} = 900 \times 2^n - 400$ et $d_{2n+1} = 900 \times 2^n - 350$. Comme $N_{2n+1} = i_{2n+1} + d_{2n+1}$, il s'ensuit que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, N_{2n+1} = 1800 \times 2^n - 750}$.

4. a. On complète l'algorithme comme suit.

Variables :	N, p et n sont des entiers naturels
Initialisation :	Demander à l'utilisateur la valeur de p
Traitement :	Si p est pair
	Affecter à n la valeur $\frac{p}{2}$
	Affecter à N la valeur $\boxed{1350 \times 2^n - 750}$
	Sinon
	Affecter à n la valeur $\frac{p-1}{2}$
	Affecter à N la valeur $\boxed{1800 \times 2^n - 750}$
	Fin de Si
Sortie :	Afficher N

- b. L'algorithme suivant affiche en sortie le temps T_0 , en minutes, au bout duquel la reproduction des bactéries ne sera plus possible dans l'éprouvette.

Variables :	N, p et n sont des entiers naturels
Initialisation :	p prend la valeur 0
	N prend la valeur 600
Traitement :	Tant que $N \leq 1\,000\,000$
	p prend la valeur $p + 1$
	Si p est pair
	Affecter à n la valeur $\frac{p}{2}$
	Affecter à N la valeur $1350 \times 2^n - 750$
	Sinon
	Affecter à n la valeur $\frac{p-1}{2}$
	Affecter à N la valeur $1800 \times 2^n - 750$
	Fin de Si
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher $10p$

- c. D'une part

$$\begin{aligned}
 N_{2n} \leq 1\,000\,000 &\Leftrightarrow 1350 \times 2^n - 750 \leq 1\,000\,000 \Leftrightarrow 2^n \leq \frac{999\,250}{1350} \\
 &\Leftrightarrow n \ln(2) \leq \ln\left(\frac{19\,985}{27}\right) \Leftrightarrow n \leq \frac{\ln\left(\frac{19\,985}{27}\right)}{\ln(2)}
 \end{aligned}$$

car $\ln(2) > 0$. Comme n est entier, on en déduit que $N_{2n} \leq 1\,000\,000$ si et seulement si $n \leq 9$. Pour un nombre pair de périodes, la reproduction est possible tant que le nombre de périodes de 10 minutes est inférieur à $2 \times 9 = 18$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} N_{2n+1} \leq 1\,000\,000 &\Leftrightarrow 1800 \times 2^n - 750 \leq 1\,000\,000 \Leftrightarrow 2^n \leq \frac{999\,250}{1800} \\ &\Leftrightarrow n \ln(2) \leq \ln\left(\frac{19\,985}{36}\right) \Leftrightarrow n \leq \frac{\ln\left(\frac{19\,985}{36}\right)}{\ln(2)} \\ &\Leftrightarrow n \leq 9. \end{aligned}$$

Pour un nombre impair de périodes, la reproduction est possible tant que le nombre de périodes de 10 minutes est inférieur à $2 \times 9 + 1 = 19$.

Ainsi, la reproduction des bactéries ne sera plus possible à partir de $p = 20$ périodes de 10 minutes et donc $\boxed{T_0 = 190 \text{ min}}$.

Exercice 2

- Utilisons l'algorithme d'Euclide pour déterminer une solution particulière de (E) :

$$26 = 1 \times 17 + 9$$

$$17 = 1 \times 9 + 8$$

$$9 = 1 \times 8 + 1$$

Ainsi, $1 = 9 - 8 = 9 - (17 - 9) = 2 \times 9 - 17 = 2(26 - 17) - 17 = 2 \times 26 - 3 \times 17$. En multipliant par 8, on en déduit que $16 \times 26 - 24 \times 17 = 8$ donc $(16; 24)$ est une solution de (E) .

Remarque. — On peut trouver de « meilleurs » coefficients en remarquant que 8 est un des restes qui apparaît dans l'algorithme d'Euclide donc on peut ne remonter l'algorithme qu'à partir de ce reste. On obtient $8 = 17 - 9 = 17 - (26 - 17) = -26 + 2 \times 17$ donc $(-1; -2)$ est également une solution de (E) . Dans la suite, nous utilisons cette solution particulière.

Soit $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ une solution de (E) . Alors, $26x - 17y = 8 = -26 + 2 \times 17$ donc $[*]$ $26(x + 1) = 17(y + 2)$. Ainsi, 17 divise $26(x + 1)$ et, comme 17 et 26 sont premiers entre eux (d'après l'algorithme d'Euclide), on déduit du théorème de Gauss que 17 divise $x + 1$. Par suite, il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + 1 = 17k$ i.e. $x = -1 + 17k$. En substituant dans $[*]$, on en déduit que $26(17k) = 17(y + 2)$ c'est-à-dire $26k = y + 2$ et donc $y = -2 + 26k$. Ainsi, si $(x; y)$ est une solution de (E) alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = -1 + 17k$ et $y = -2 + 26k$.

Réciproquement, si $k \in \mathbb{Z}$, $x = -1 + 17k$ et $y = -2 + 26k$ alors

$$26x - 17y = 26(-1 + 17k) - 17(-2 + 26k) = -26 + 2 \times 17 - 26 \times 17k + 17 \times 26k = 1$$

donc $(x; y)$ est solution de (E) .

On conclut que l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$ est

$$\boxed{\{(-1 + 17k; -2 + 26k) \mid k \in \mathbb{Z}\}}.$$

Remarque. — La solution déterminée à l'aide de l'algorithme d'Euclide correspond à $k = 1$.

2. Prenons comme origine du temps, exprimé en jours, le mercredi 22 mars 2017. Comme le corps céleste C_1 a une période d'apparition de 26 jours, il apparaît les jours numéro $26x$ avec $x \in \mathbb{N}$. De même, le corps céleste C_2 a une période d'apparition de 17 jours donc il apparaît les jours numéro $8 + 27y$ jours avec $y \in \mathbb{N}$. On cherche donc les entiers naturels x et y les plus petits possibles tels que $26x = 8 + 27y$ i.e. $26x - 27y = 8$. D'après la question 1, ceci revient à déterminer le plus petit entier relatif k tel que $-1 + 17k \geq 0$ et $-2 + 26k \geq 0$. Il s'agit clairement de $k = 1$ (qui correspond à $x = 16$ et $y = 24$) donc les corps célestes apparaîtront simultanément $16 \times 26 = 416$ jours après le mercredi 22 mars 2017.

On peut écrire $416 = 365 + 31 + 20$ donc, puisque le mois de mars compte 31 jours, ceci se produit 1 an, 1 mois et 20 jours après le 22 mars 2017 i.e. 20 jours après le 22 avril 2018. Or, le mois d'avril compte 30 jours et que $22 + 20 = 30 + 12$ donc il s'agit du 12 mai 2018.

De plus, $416 \equiv 3 \pmod{7}$ donc le jour de la semaine sera 3 jours après un mercredi i.e. un samedi.

La prochaine apparition simultanée des deux corps céleste aura donc lieu le samedi 12 mai 2018.

Exercice 3 (facultatif)

1. Notons, pour tout $(i; j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, m_{ij} le coefficient de M d'indices i et j . Comme M est stochastique en ligne, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n m_{ij} = 1$. Considérons la matrice colonne X de taille $n \times 1$ dont tous les coefficients sont des 1 et posons $Y := MX$. Alors, par définition, le coefficient d'indices i et 1 de Y est

$$y_{i,1} := \sum_{j=1}^n m_{ij} \times 1 = \sum_{j=1}^n m_{ij} = 1$$

donc $Y = X$ i.e. $MX = 1 \times X$. Comme X n'est pas nul, on en déduit que 1 est valeur propre de M .

2. Supposons que λ est une valeur propre de M . Il existe donc une matrice colonne non nulle X de taille $n \times 1$ telle que $MX = \lambda X$. Notons, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, x_i le coefficient d'indices i et 1 de X . Notons k un indice tel que x_k soit maximum en valeur absolue parmi les x_i (cet indice n'est pas forcément unique). Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|x_i| \leq |x_k|$. Remarquons que $|x_k| \neq 0$ sinon $X = 0$. En utilisant les mêmes notations que dans la question 1, on a, grâce à l'inégalité triangulaire,

$$|y_k| = \left| \sum_{j=1}^n m_{kj} \times x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |m_{kj} x_j| = \sum_{j=1}^n |m_{kj}| |x_j|.$$

Or, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|x_j| \leq |x_k|$ donc $|m_{kj}| |x_j| \leq |m_{kj}| |x_k| = m_{kj} |x_k|$ car $m_{kj} \geq 0$, et ainsi

$$|y_k| \leq \sum_{j=1}^n m_{kj} |x_k| = |x_k| \sum_{j=1}^n m_{kj} = |x_k|$$

puisque M est stochastique en ligne donc $\sum_{j=1}^n m_{kj} = 1$.

Mais, par ailleurs, comme $MX = \lambda X$, $y_k = \lambda x_k$ donc $|\lambda x_k| \leq |x_k|$. Dès lors, $|\lambda| |x_k| \leq |x_k|$ et, comme $|x_k| \neq 0$, on conclut que $\boxed{|\lambda| \leq 1}$.