**Devoir à la maison n°4 – À rendre le lundi 3 janvier 2021**

# L'équation $x^2 - 7y^2 = 1$

On considère l'équation $(E)$ : $x^2 - 7y^2 = 1$ d'inconnue $(x\,;y) \in \mathbb{N}^2$. On cherche donc les solutions de $(E)$ qui sont formées de nombres entiers naturels et, dans toute la suite, il est sous-entendu quand on parle de solutions que ce sont des couples de nombres entiers naturels.

**1.** Déterminer toutes les solutions $(x\,;y)$ de $(E)$ telles que $0 \leqslant x \leqslant 8$.

**2.** On pose $A = \begin{pmatrix} 8 & 21 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$. On considère la suite de matrices $(X_n)$ définie par $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les réels $u_n$ et $v_n$ par $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

**a.** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ et $v_n$ sont des entiers naturels et que $u_n > 0$.

**b.** Démontrer que la suite $(u_n)$ est strictement croissante.

**c.** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_n\,;v_n)$ est une solution de $(E)$.

**d.** En déduire que $(E)$ possède une infinité de solutions.

**e.** Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Écrire en langage Python une fonction `solution(N)` qui renvoie une solution $(x\,;y)$ de $(E)$ telle que $x$ et $y$ comportent au moins $N$ chiffres dans leurs écritures décimales.

Justifier que l'exécution de cette fonction s'arrête et renvoie effectivement un couple $(x\,;y)$ convenable quelle que soit la valeur de $N$.

**3.** On pose $P = \begin{pmatrix} \sqrt{7} & -\sqrt{7} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $a = 8 + 3\sqrt{7}$, $b = 8 - 3\sqrt{7}$ et $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

**a.** Justifier que $P$ est inversible et calculer $P^{-1}$.

**b.** Vérifier que $PDP^{-1} = A$.

**c.** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

**d.** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$.

**e.** Déduire des questions précédentes que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{a^n + b^n}{2} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{a^n - b^n}{2\sqrt{7}}.$$

**4.** (facultatif) On se propose de montrer que l'ensemble des solutions de $(E)$ est exactement $\{(u_n\,;v_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Pour cela, on considère une solution $(x\,;y)$ de $(E)$ et on va montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x = u_k$ et $y = v_k$.

**a.** Justifier qu'il existe un entier naturel $k$ tel que $a^k \leqslant x + y\sqrt{7} < a^{k+1}$.

Dans toute la suite, $k$ désigne un tel entier et on pose $t = (x + y\sqrt{7})b^k$.

**b.** Montrer qu'il existe des entiers relatifs $r$ et $s$ tels que $t = r + s\sqrt{7}$. (On pourra commencer par exprimer $b^k$ en fonction de $u_k$ et $v_k$.)

**c.** Montrer que $1 \leqslant t < a$. (On pourra commencer par calculer $ab$.)

**d.** Montrer que $\dfrac{1}{t} = r - s\sqrt{7}$.

**e.** En déduire que $1 \leqslant r \leqslant 8$ et conclure.