Devoir à la maison n°4 – À rendre le lundi 4 janvier 2021

Autour des matrices nilpotentes d'ordre 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une matrice N carrée d'ordre n est nilpotente s'il existe un entier $k > 0$ tel que $N^k = O_n$.

Partie A – Exemples et contre-exemples de matrices nilpotentes

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La matrice O_n est-elle nilpotente ? La matrice I_n est-elle nilpotente ?

2. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit M et N deux matrices carrées d'ordre n. On suppose que N est nilpotente et que M et N commutent. Montrer que MN est nilpotente.

4. a. Montrer qu'une matrice nilpotente n'est pas inversible.

b. En déduire que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas nilpotente.

Partie B – Indice de nilpotence d'une matrice carrée d'ordre 2

Dans toute cette partie, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice quelconque. Le nombre $a + d$ est appelé la trace de A et on le note $\mathrm{tr}(A)$.

1. Démontrer que, $A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = O_2$.

2. On suppose à présent que A est une matrice nilpotente non nulle.

a. Déduire de la question précédente que $A^2 - \mathrm{tr}(A)A = O_2$.

b. On note p l'indice de nilpotence de A i.e. le plus petit entier naturel $k > 0$ tel que $A^k = O_2$. Justifier que $p \geqslant 2$.

c. Montrer que $\mathrm{tr}(A)A^{p-1} = O_2$ et en déduire que $\mathrm{tr}(A) = 0$.

d. Conclure que $p = 2$.

3. On a montré dans la **Partie A** que si A est nilpotente alors A n'est pas inversible. Que penser de la réciproque ?

4. On a montré dans la question **2.c.** que si A est nilpotente alors $\mathrm{tr}(A) = 0$. Que penser de la réciproque ?

Partie C – Exemple d'utilisation d'une matrice nilpotente

On considère deux suites (a_n) et (b_n) définies par : $a_0 = 1$, $b_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n + b_n \\ b_{n+1} = -9a_n - 2b_n \end{cases}.$$

Pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice constante A carrée d'ordre 2 telle que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$.

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

3. Montrer qu'il existe une matrice nilpotente N telle que $A = I_2 + N$.

4. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = I_2 + nN$.

5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les expressions de a_n et b_n en fonction de n.

Partie D (facultative)

Déterminer toutes les matrices carrées d'ordre 2 qui sont nilpotentes. (Il y en a une infinité donc on attend les différentes « formes » possibles pour une telle matrice.)