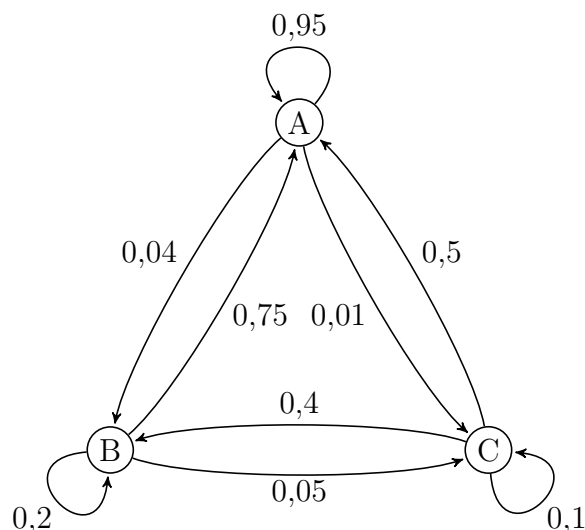


Correction du devoir à la maison n°4

Partie A – Étude d'un premier milieu

- On considère les états A : « l'atome est dans l'état fondamental », B : « l'atome est dans l'état excité bas » et C : « l'atome est dans l'état excité haut ».

On peut représenté la situation par le graphe probabiliste suivant :



- La matrice de transition associée à ce graphe est $M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,04 & 0,01 \\ 0,75 & 0,2 & 0,05 \\ 0,5 & 0,4 & 0,1 \end{pmatrix}$.
- Par théorème, $X_{10} = X_0 M^{10}$. À l'aide de la calculatrice, on obtient $P_{10} \approx (0,933 \ 0,053 \ 0,013)$. Ainsi, la probabilité que l'atome soit dans l'état fondamental après 10 nanosecondes est environ 0,933.
- On suppose que $X_{10} = (1 \ 0 \ 0)$. Alors, comme $X_{15} = X_{10} M^5$, on obtient $X_{15} \approx (0,933 \ 0,053 \ 0,013)$ donc la probabilité que l'atome soit dans l'état excité haut au bout de 15 nanosecondes sachant qu'il est dans l'état fondamental au bout de 10 nanosecondes est environ 0,053.
- Comme la matrice M ne contient par de 0, par théorème, le système admet un unique état stable X et de plus (X_n) converge vers X .

En calculant X_{99} à l'aide de la calculatrice, on constate que $X_{99} \approx \left(\frac{14}{15} \ \frac{4}{75} \ \frac{1}{75} \right)$.

On conjecture que l'état stable du système est $\left(\frac{14}{15} \ \frac{4}{75} \ \frac{1}{75} \right)$ (qui est bien un état probabiliste).

Or, on vérifie par le calcul que $\left(\frac{14}{15} \ \frac{4}{75} \ \frac{1}{75} \right) M = \left(\frac{14}{15} \ \frac{4}{75} \ \frac{1}{75} \right)$ donc cet état est

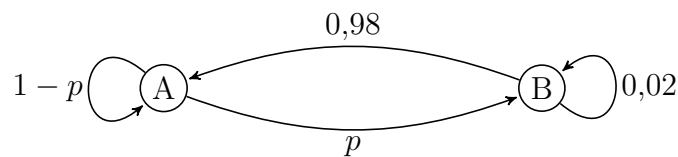
bien stable. Par unicité, on en déduit que $X = \boxed{\left(\frac{14}{15} \ \frac{4}{75} \ \frac{1}{75} \right)}$.

6. Comme (X_n) converge vers l'état stable X , on conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{14}{15}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{4}{75}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{1}{75}$.
Cela signifie qu'au bout d'un grand nombre de nanoseconde, si on choisit un atome au hasard dans ce milieu, la probabilité qu'il soit dans l'état fondamental est proche de $\frac{14}{15}$, la probabilité qu'il soit dans l'état excité bas est proche de $\frac{4}{75}$ et la probabilité qu'il soit dans l'état excité haut est proche de $\frac{1}{75}$.

Partie B – Étude d'un second milieu

1. On considère les états A : « l'atome est dans l'état fondamental » et B : « l'atome est dans l'état excité ».

On peut représenté la situation par le graphe probabiliste suivant :



2. La matrice de transition associée à ce graphe est $M = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ 0,98 & 0,02 \end{pmatrix}$.
3. Notons (X_n) la suite des états probabilistes. Comme la matrice M ne contient pas de 0 (puisque $0 < p < 1$), par théorème, quel que soit l'état probabiliste initiale X_0 , (X_n) converge vers l'état stable X . Or, l'énoncé permet de dire $X = (0,96 \ 0,04)$ donc $X = XM$. Ainsi,

$$(0,96 \ 0,04) = (0,96 \ 0,04) \begin{pmatrix} 1-p & p \\ 0,98 & 0,02 \end{pmatrix} = 0,96(1-p)+0,04 \times 0,98 \quad 0,96p+0,04 \times 0,02.$$

Ainsi, en particulier, $0,04 = 0,96p + 0,04 \times 0,02$ donc $0,96p = 0,0392$ donc $p = \frac{0,0392}{0,96}$.

On a donc $\boxed{p = \frac{49}{1200} \approx 0,041}$.