

Devoir à la maison n°4

À rendre le jeudi 9 mai 2019

Un atome peut se trouver dans trois états différents : *l'état fondamental* et deux états excités appelés *l'état excité haut* et *l'état excité bas*. À chaque nanoseconde, l'atome peut changer d'état avec une certaine probabilité.

Partie A – Étude d'un premier milieu

Dans cette partie, on se place dans un premier milieu où, à chaque nanoseconde,

- si l'atome se trouve dans l'état fondamental, la probabilité qu'il passe dans l'état excité bas est 0,04 et la probabilité qu'il passe dans l'état excité haut est 0,01.
- si l'atome se trouve dans l'état excité bas, la probabilité qu'il passe dans l'état fondamental est 0,75 et la probabilité qu'il passe dans l'état excité haut est 0,05.
- si l'atome se trouve dans l'état excité haut, la probabilité qu'il passe dans l'état fondamental est 0,5 et la probabilité qu'il passe dans l'état excité bas est 0,4.

On observe un atome qui est initialement à l'état fondamental. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, On note a_n la probabilité que l'atome soit dans l'état fondamental, b_n la probabilité qu'il se trouve dans l'état excité bas et c_n la probabilité qu'il se trouve dans l'état excité haut, n nanosecondes après le début de l'observation et on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$. On a donc $X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

L'objectif est d'étudier l'état l'atome à long terme.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste à trois états que l'on définira clairement.
2. Déterminer la matrice de transition A telle que, pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = X_n A$.
3. Déterminer la probabilité que l'atome soit dans l'état fondamental au bout de 10 nanosecondes. (On arrondira à 10^{-3} près).
4. Si l'atome est dans l'état fondamental au bout de 10 nanosecondes, quelle est la probabilité qu'il soit dans l'état excité haut au bout de 15 nanosecondes ? (On arrondira à 10^{-3} près).
5. Montrer que le système admet un unique état stable que l'on déterminera.
6. Déterminer, en justifiant, les limites des suites (a_n) , (b_n) et (c_n) . Interpréter ces limites.

Partie B – Étude d'un second milieu

Dans cette partie, on simplifie le modèle en ne considérant que deux états : *l'état fondamental* et *l'état excité* (sans distinguer entre *haut* et *bas*). On se place dans un second milieu, dans lequel on ne connaît pas la probabilité que l'atome passe de l'état fondamental à l'état excité. On note p cette probabilité. On suppose que p est constante au cours du temps et que $0 < p < 1$. On sait, en revanche, qu'à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état excité à l'état fondamental est 0,98.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste à deux états que l'on définira clairement.
2. Donner, en fonction de p , la matrice de transition M associée à ce graphe.
3. Après un temps très long, dans le second milieu, on observe qu'environ 96% des atomes sont dans l'état fondamental.

En détaillant sa démarche, déterminer la valeur exacte de p puis en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.