

Correction du devoir à la maison n°4

Exercice 1

NOTA BENE : on utilise dans toute la suite que (u_n) est une suite d'entiers naturels et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ ce qui se démontre très facilement par récurrence mais que j'aurai dû préciser dans l'énoncé de l'exercice.

1. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, comme δ_n divise u_n et u_{n+1} , δ_n divise $u_{n+1} + u_n = u_{n+2}$. Ainsi, δ_n divise u_{n+1} et u_{n+2} donc δ_n divise δ_{n+1} . Réciproquement, δ_{n+1} divise u_{n+1} et u_{n+2} donc δ_{n+1} divise $u_{n+2} - u_{n+1} = u_n$. Ainsi, δ_{n+1} divise u_n et u_{n+1} donc δ_{n+1} divise δ_n . Comme δ_n et δ_{n+1} sont positifs, on conclut que $\delta_n = \delta_{n+1}$. Ainsi, la suite (δ_n) est constante.
b. Comme $\delta_0 > 0$ et δ_0 divise $u_1 = 1$, $\delta_0 = 1$. Dès lors, comme (δ_n) est constante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta_n = 1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.
2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n + u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

Ainsi, en posant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

- b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrivons $A^n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

donc $b = u_n$ et $d = u_{n+1}$. De plus,

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = X_{n+1} = A^n X_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}$$

donc $a+b = u_{n+1}$ et $c+d = u_{n+2}$. On en déduit que $a = u_{n+1} - b = u_{n+1} - u_n = u_{n-1}$ et $c = u_{n+2} - d = u_{n+2} - u_{n+1} = u_n$.

Ainsi, on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

- c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(k)$: « u_n divise b_k . ». Comme $(A_n)^0 = I_2$, $b_0 = 0$ et 0 est divisible par tout entier donc u_n divise b_0 i.e. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Alors,

$$(A^n)^{k+1} = (A^n)^k \times A^n = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k u_{n-1} + b_k u_n & a_k u_n + b_k u_{n+1} \\ c_k u_{n-1} + d_k u_n & c_k u_n + d_k u_{n+1} \end{pmatrix}$$

donc $b_{k+1} = a_k u_n + b_k u_{n+1}$. Or, par hypothèse, u_n divise b_k et u_n divise u_n donc u_n divise $a_k u_n + b_k u_{n+1}$ i.e. u_n divise b_{k+1} et donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

On a donc montré par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, u_n divise b_k .

- d. Soit n et m deux entiers naturels non nuls. Supposons que n divise m . Alors, il existe un entier naturel k tel que $m = nk$. D'après la question précédente, u_n divise b_k . Or, b_k est le coefficient d'indices 1 et 2 de $(A^n)^k = A^{nk}$ et ce coefficient est, d'après la question **2.b.**, u_{nk} i.e. u_m . Ainsi, u_n divise u_m .
3. a. Par définition, d divise p et q donc, d'après la question **2.d.**, u_d divise u_p et u_q et, ainsi, u_d divise D .
- b. Considérons les entiers p' et q' tels que $p = dp'$ et $q = dq'$. Par théorème, p' et q' sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs r et s tels que $rp' + sq' = 1$. En multipliant par d , il s'ensuit que $rp + sq = d$. De plus, comme p et q sont strictement positifs, $p \geq d$ et $q \geq d$ donc, si r et s sont négatifs, $rp + sq \leq 0$ ce qui est absurde et, si r et s sont strictement positifs, $d = rp + sq \geq p + q \geq 2d$ ce qui est également absurde. Ainsi, r et s sont deux entiers de signes contraires tels que $rp + sq = d$.
- c. Comme $rp - tq = d$, $rp = d + tq$ et les entiers d , rp et tq sont tous positifs donc $A^{rp} = A^{d+tq} = A^d A^{tq}$. Dès lors,

$$\begin{pmatrix} u_{rp-1} & u_{rp} \\ u_{rp} & u_{rp+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{d-1} & u_d \\ u_d & u_{d+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{tq-1} & u_{tq} \\ u_{tq} & u_{tq+1} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} u_{d-1}u_{tq-1} + u_d u_{tq} & u_{d-1}u_{tq} + u_d u_{tq+1} \\ u_d u_{tq-1} + u_{d+1} u_{tq} & u_d u_{tq} + u_{d+1} u_{tq+1} \end{pmatrix}$$

donc, en particulier, $u_{rp} = u_{d-1}u_{tq} + u_d u_{tq+1}$.

- d. Par hypothèse, D divise u_p et, d'après la question **2.d.**, u_p divise u_{rp} donc, par transitivité, D divise u_{rp} . On montre, de même, que D divise u_{tq} . Notons g le P.G.C.D. de D et u_{tq+1} . Alors, g divise D donc g divise u_{tq} et g divise u_{tq+1} donc g divise $\text{PGCD}(u_{tq}, u_{tq+1})$. Or, d'après la question **1.b.**, $\text{PGCD}(u_{tq}, u_{tq+1}) = 1$ donc, comme $g > 0$, $g = 1$. Ainsi, D et u_{tq+1} sont premiers entre eux.
- e. D'après la question **c.**, $u_d u_{tq+1} = u_{rp} - u_{d-1} u_{tq}$. Or, d'après la question **d.**, D divise u_{rp} et u_{tq} donc D divise $u_d u_{tq+1}$. De plus, d'après la question **d.**, D est premier avec u_{tq+1} donc, d'après le théorème de Gauss, D divise u_d . Ainsi, D divise u_d et u_d divise D donc, comme $D > 0$ et $u_d > 0$, $D = u_d$. On a donc bien montré que, pour tous entiers p et q non nuls,

$$\text{PGCD}(u_p, u_q) = u_{\text{PGCD}(p,q)}.$$

Exercice 2. — Notons d le P.G.C.D. de p et q . Il existe des entiers a et b premiers entre eux tels que $p = da$ et $q = db$. Comme $p^2 = q^3$, on a donc $d^2 a^2 = d^3 b^3$ donc $a^2 = db^3$. Or, b divise db^3 donc b divise $a^2 = a \times a$. Mais b est premier avec a donc d'après le théorème de Gauss b divise a et ainsi b divise a et b donc b divise $\text{PGCD}(a, b) = 1$. Comme $b > 0$, on conclut que $b = 1$ donc $q = d$ et ainsi $p = qa$. Dès lors, $np = p^3 = q^3 a^3 = na^3$ donc, comme $n \neq 0$, $p = a^3$. On conclut donc que $n = p^2 = (a^3)^2 = a^6$. Ainsi, a est un entier tel que $n = a^6$.