

Devoir à la maison n°4

À rendre le vendredi 09 mars 2018

Exercice 1. — On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Le but de l'exercice est de démontrer que, pour tous entiers naturels non nuls p et q ,

$$\text{PGCD}(u_p, u_q) = u_{\text{PGCD}(p,q)}.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note δ_n le P.G.C.D. de u_n et u_{n+1} .
 - a. Démontrer que la suite (δ_n) est constante.
 - b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.
 - a. Déterminer la matrice carrée A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
Il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$ et $X_{n+1} = A^n X_1$. (On ne demande pas de démontrer ces égalités.)
 - b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A^n = \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

- c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(A^n)^k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$.
Démontrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, u_n divise b_k .
- d. En déduire que, pour tous entiers naturels non nuls n et m , si n divise m alors u_n divise u_m .
3. Soit p et q deux entiers naturels non nuls. On pose $d = \text{PGCD}(p, q)$ et $D = \text{PGCD}(u_p, u_q)$.
 - a. Déduire de la question 2.d. que u_d divise D .
 - b. Justifier l'existence de deux entiers r et s de signes contraires tels que $rp + sq = d$.
Quitte à échanger p et q , on peut toujours supposer $r \geq 0$ et $s \leq 0$. On pose alors $t = -s$ de telle sorte que $t \in \mathbb{N}$.
 - c. Justifier que $A^{rp} = A^d A^{tq}$ et en déduire que

$$u_{rp} = u_{d-1}u_{tq} + u_d u_{tq+1}.$$

- d. Montrer que D divise u_{rp} et u_{tq} et que D est premier avec u_{tq+1} .
- e. Conclure.

Exercice 2 (facultatif). — On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe des entiers strictement positifs p et q tels que $n = p^2$ et $n = q^3$.

Montrer qu'il existe un entier k tel que $n = k^6$.