

Correction du devoir à la maison n°4

Exercice 1. — Supposons que x et y soient deux entiers relatifs non nuls tels que

$$\begin{cases} x + y = 2017 \\ xy = (\text{PGCD}(x, y))^3 \end{cases}.$$

Notons $d = \text{PGCD}(x, y)$. Il existe deux entiers a et b premiers entre eux tels que $x = da$ et $y = db$. Ainsi, $d(a + b) = 2017$ et $d^2ab = d^3$ donc $ab = d$. Il s'ensuit que d est un diviseur positif de 2017. Or, les seuls diviseurs positifs de 2017 sont 1 et 2017 donc ou bien $d = 1$ et $a + b = 2017$ ou bien $d = 2017$ et $a + b = 1$. Or, si $d = 1$ alors $a + b = 2017$ et $ab = 1$ donc, comme a et b sont des entiers, $|a| = |b| = 1$ et ainsi $-2 \leq a + b \leq 2$ ce qui est absurde puisque $a + b = 2017$. De même, si $d = 2017$ alors $a + b = 1$ et $ab = 2017$ donc les valeurs possibles pour $(a; b)$ sont $(1; 2017)$, $(-1; -2017)$, $(2017; 1)$ et $(-2017; -1)$ et dans aucun de ces cas $a + b$ n'est égal à 1.

On conclut donc que l'ensemble cherché est vide.

Exercice 2

1. À l'aide de la calculatrice, on trouve $d_0 = 2$, $d_1 = 4$, $d_2 = 8$ et $d_3 = 2$.
2. Remarquons que $a_n = n(n + 1) + 2$. Or, l'un des deux entiers n ou $n + 1$ est pair donc $n(n + 1)$ est pair et ainsi a_n est pair. De même, $b_n = n(n - 3) + 2$ et les entiers n et $n - 3$ n'ont pas la même parité car $n - (n - 3) = 3$ est impair. Ainsi, leur produit est pair et donc b_n est pair.

On conclut donc que a_n et b_n sont pairs.

3. Par définition, d_n divise a_n et b_n donc d_n divise $a_n - b_n = (n^2 + n + 2) - (n^2 - 3n + 2) = 4n$. Ainsi, d_n divise a_n et $4n$ donc d_n divise

$$4a_n - (n + 1) \times 4n = 4(n^2 + n + 2) - 4n(n + 1) = 4n^2 + 4n + 8 - 4n^2 - 4n = 8.$$

On a donc bien montré que d_n divise 8.

4. On obtient le tableau suivant.

Reste r_n de n modulo 8	0	1	2	3	4	5	6	7
Reste de a_n modulo 8	2	4	0	6	6	0	4	2
Reste de b_n modulo 8	2	0	0	2	6	4	4	6

5. On sait a_n et b_n sont pairs donc 2 divise a_n et b_n et ainsi 2 divise d_n i.e. d_n est pair. Par ailleurs, $d_n > 0$ et on a montré que d_n divise 8 donc $d_n \in \{2, 4, 8\}$.

Si $r_n = 2$, le tableau précédent montre que 8 divise a_n et b_n donc 8 divise d_n et ainsi $d_n = 8$.

Dans tous les autres cas, au moins l'un des deux nombres a_n ou b_n n'est pas divisible par 8 donc $d_n \in \{2, 4\}$.

Si $r_n \in \{1, 5, 6\}$ alors les restes de a_n et b_n modulo 8 sont 0 ou 4 donc ces deux nombres s'écrivent sous la forme $8k = 4(2k)$ ou $4 + 8k = 4(2k + 1)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ donc ils sont tous les deux divisibles par 4. On conclut alors comme précédemment que $d_n = 4$.

Dans les cas restants, les restes de a_n et b_n modulo 8 sont 2 ou 6 donc ces nombres s'écrivent $2+8k = 2+4(2k)$ ou $6+8k = 2+4(2k+1)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ donc leur reste modulo 4 est 2. Ils ne sont donc pas divisibles par 4 et ainsi $d_n = 2$.

Finalement,

• $d_n = 8$ si $r_n = 2$ • $d_n = 4$ si $r_n \in \{1, 5, 6\}$ • $d_n = 2$ si $r_n \in \{0, 3, 4, 7\}$

Exercice 3 (facultatif). — Montrons l'existence de u_n et v_n par récurrence sur n .

Pour $n = 0$, $(1 + \sqrt{14})^0 = 1 = 1 + 0 \times \sqrt{14}$ donc, en posant $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$, on a bien $(1 + \sqrt{14})^0 = u_0 + v_0\sqrt{14}$.

Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, il existe deux entiers u_n et v_n tels que $(1 + \sqrt{14})^n = u_n + v_n\sqrt{14}$. Alors,

$$(1 + \sqrt{14})^{n+1} = (1 + \sqrt{14})(1 + \sqrt{14})^n = (1 + \sqrt{14})(u_n + v_n\sqrt{14}) = u_n + v_n\sqrt{14} + u_n\sqrt{14} + v_n14$$

donc

$$(1 + \sqrt{14})^{n+1} = (u_n + 14v_n) + (u_n + v_n)\sqrt{14}.$$

Dès lors, en posant $u_{n+1} = u_n + 14v_n$ et $v_{n+1} = u_n + v_n$ qui sont bien entiers car u_n , v_n et 14 le sont, on obtient $(1 + \sqrt{14})^{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1}\sqrt{14}$.

Ainsi, on a prouvé par récurrence l'existence de deux suites d'entiers (u_n) et (v_n) telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1 + \sqrt{14})^n = u_n + v_n\sqrt{14}$. De plus, on a vu que ces suites vérifient $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 14v_n$ et $v_{n+1} = u_n + v_n$.

Remarquons, enfin, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n ne sont pas tous les deux nuls car $1 + \sqrt{14} > 0$ donc $(1 + \sqrt{14})^n \neq 0$.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = \text{PGCD}(u_n, v_n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, d_n divise u_n et v_n donc d_n divise $u_n + 14v_n$ et $u_n + v_n$ i.e. d_n divise u_{n+1} et v_{n+1} . Par suite, d_n divise d_{n+1} . Il existe donc un entier m tel que $d_{n+1} = md_n$.

Réciproquement, d_{n+1} divise u_{n+1} et v_{n+1} donc d_{n+1} divise $u_{n+1} - v_{n+1} = 13v_n$ et d_{n+1} divise $14v_{n+1} - u_{n+1} = 13u_n$. Ainsi, d_{n+1} divise $\text{PGCD}(13u_n, 13v_n) = 13d_n$. Il existe donc un entier q tel que $13d_n = qd_{n+1}$. Or, $d_{n+1} = md_n$ donc $13d_n = qmd_n$ et, comme $d_n \neq 0$, $13 = qm$. Ainsi, m est un diviseur positif de 13 donc $m = 1$ ou $m = 13$. On en déduit que $d_{n+1} = d_n$ ou $d_{n+1} = 13d_n$.

Nous allons montrer que d_{n+1} ne peut pas être égal à $13d_n$. Si c'est le cas, on a $13d_n$ qui divise v_{n+1} et donc, en particulier, 13 divise v_{n+1} . Il suffit donc de montrer que v_{n+1} n'est pas divisible par 13 pour $n \in \mathbb{N}$ i.e. que v_n n'est pas divisible par 13 pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Établissons-le par récurrence. Comme $v_1 = 1$, c'est vrai au rang $n = 1$. Supposons que, pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$, 13 ne divise pas v_k . Alors, comme $k \geq 1$,

$$v_{k+1} = u_k + v_k = u_{k-1} + 14v_{k-1} + u_{k-1} + v_{k-1} = 2(u_{k-1} + v_{k-1}) + 13v_{k-1} = 2v_k + 13v_{k-1}.$$

Dès lors, $2v_k = v_{k+1} - 13v_{k-1}$. Supposons par l'absurde que 13 divise v_{k+1} . Alors, l'écriture précédente assure que 13 divise $2v_k$. Or, 2 et 13 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Gauss, 13 divise v_k . Ceci est contradictoire avec l'hypothèse de récurrence donc 13 ne divise pas v_{k+1} .

On a donc montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 13 ne divise pas v_n .

Par suite, $d_{n+1} = d_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc (d_n) est constante. Or, $d_0 = \text{PGCD}(1, 0) = 1$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = 1$.