

Devoir à la maison n°4

À rendre le mercredi 22 février 2017

Exercice 1. — Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs non nuls $(x; y)$ tels que

$$\begin{cases} x + y = 2017 \\ xy = (\text{PGCD}(x, y))^3 \end{cases}.$$

Exercice 2. — Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $a_n = n^2 + n + 2$ et $b_n = n^2 - 3n + 2$. On note, de plus, d_n le P.G.C.D. de a_n et b_n et r_n le reste de n modulo 8.

1. Calculer d_0 , d_1 , d_2 et d_3 .
2. Montrer que a_n et b_n sont pairs.
3. Démontrer que d_n divise $4n$ et en déduire que d_n divise 8.
4. Reproduire et compléter le tableau suivant.

Reste r_n de n modulo 8								
Reste de a_n modulo 8								
Reste de b_n modulo 8								

5. Déterminer d_n en fonction de r_n .

Exercice 3 (facultatif). — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux entiers non tous nuls u_n et v_n tels que

$$(1 + \sqrt{14})^n = u_n + v_n\sqrt{14}$$

et déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{PGCD}(u_n, v_n)$.(Indication : on pourra montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 13 ne divise pas v_n .)

————— Fin du devoir —————

Exercice. — Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.
2. On pose $\alpha = n + 3$ et $\beta = 2n + 1$ et on note δ le P.G.C.D. de α et β .
 - a. Calculer $2\alpha - \beta$ et en déduire les valeurs possibles de δ .
 - b. Démontrer que α et β sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est multiple de 5.
3. On considère les nombres a et b définis par $a = n^3 + 2n^2 - 3n$ et $b = 2n^2 - n - 1$.
Montrer que a et b sont des entiers naturels divisibles par $n - 1$.
4. a. On note d le P.G.C.D. de $n(n + 3)$ et de $2n + 1$. Montrer que δ divise d , puis que $\delta = d$.
b. En déduire le P.G.C.D. Δ de a et b en fonction de n .