

Devoir à la maison n°4

Exercice 1

1. Étant donné que $1 \times (3n + 1) - 3 \times n = 1$, le théorème de Bézout assure que n et $3n + 1$ sont premiers entre eux.
2. a. Par définition, δ_n divise $n + 2$ et $3n + 1$ donc δ_n divise $3(n + 2) - (3n + 1) = 5$. Comme $\delta_n > 0$, il s'ensuit que $\boxed{\delta_n \in \{1, 5\}}$.
b. Sachant que $\delta_n \in \{1, 5\}$, $\delta_n = 5$ si et seulement si 5 divise $n + 2$ et $3n + 1$. Or,

$$5|(n + 2) \Leftrightarrow n + 2 \equiv 0 [5] \Leftrightarrow n \equiv -2 [5] \Leftrightarrow n \equiv 3 [5].$$

Ainsi, si $\delta_n = 5$ alors $n \equiv 3 [5]$.

Réciproquement, si $n \equiv 3 [5]$ alors ce qui précède montre que $5|(n + 2)$. De plus, on a alors $3n + 1 \equiv 3 \times 3 + 1 [5] \equiv 10 [5] \equiv 0 [5]$ donc $5|(3n + 1)$. Ainsi, si $n \equiv 3 [5]$ alors $\delta_n = 5$.

On conclut que $\boxed{\delta_n = 5 \text{ si et seulement si } n \equiv 3 [5]}$.

3. Comme n et $3n + 1$ sont premiers entre eux, par propriété, $d_n = \text{PGCD}(n + 2, 3n + 1) = \delta_n$. Ainsi, $\boxed{\text{si } n \equiv 3 [5] \text{ alors } d_n = 5 \text{ et sinon } d_n = 1}$.

Exercice 2

1. Par définition, $u_0 = 8$, $u_1 = 34$, $u_2 = 164$ et $u_3 = 814$. On en déduit à l'aide de la calculatrice que $d_0 = \text{PGCD}(8, 34) = 2$, $d_1 = \text{PGCD}(34, 164) = 2$ et $d_2 = \text{PGCD}(164, 814) = 2$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, par définition, d_n divise u_n et u_{n+1} donc d_n divise $5u_n - u_{n+1} = 6$. Comme $d_n > 0$, il s'ensuit que $\boxed{d_n \in \{1, 2, 3, 6\}}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6$. Or, par définition, d_n divise u_{n+1} et on a vu précédemment que d_n divise 6 donc d_n divise $5u_{n+1} - 6$ i.e. d_n divise u_{n+2} . Ainsi, d_n divise u_{n+1} et u_{n+2} donc d_n divise d_{n+1} .

Réciproquement, d_{n+1} divise u_{n+1} et d_{n+1} divise 6 donc d_{n+1} divise $u_{n+1} + 6 = 5u_n$. Or, $d_{n+1} \in \{1, 2, 3, 6\}$ donc d_{n+1} est premier avec 5. Le théorème de Gauss assure alors que d_{n+1} divise u_n . Ainsi, d_{n+1} divise u_n et u_{n+1} donc $\boxed{d_{n+1} \text{ divise } d_n}$.

Comme $d_n > 0$ et $d_{n+1} > 0$, on conclut que $\boxed{d_n = d_{n+1}}$ ce qui prouve que (d_n) est constante.

Par définition, $d_0 = \text{PGCD}(a, 5a - 6)$ donc d_0 divise a . Or, a est pair et n'est pas un multiple de 3 et $d_0 \in \{1, 2, 3, 6\}$ donc $d_0 = 1$ ou $d_0 = 2$. De plus, comme a est pair, $5a - 6$ est pair donc 2 divise a et $5a - 6$ et ainsi $d_0 = 2$.

Finalement, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, d_n = 2}$.

4. Soit la proposition $H_n : \ll 2u_n = (2a - 3)5^n + 3 \gg$.
 $2u_0 = 2a$ et $(2a - 3) \times 5^0 + 3 = 2a - 3 + 3 = 2a$ donc H_0 est vraie.
Supposons que H_k soit vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

Alors,

$$\begin{aligned} 2u_{k+1} &= 2(5u_k - 6) = 5(2u_k) - 12 = 5[(2a - 3)5^k + 3] - 12 \\ &= (2a - 3)5^{k+1} + 15 - 12 = (2a - 3)5^{k+1} + 3 \end{aligned}$$

donc H_{k+1} est vraie.

On a donc démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, 2u_n = (2a - 3)5^n + 3}$.

5. Ce qui précède est valable pour tout entier a pair et premier avec 3. C'est donc en particulier valable pour $a = 2$. Pour cette valeur de u_0 , on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2u_n = (2 \times 2 - 3)5^n + 3 = 5^n + 3$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{PGCD}(5^n + 3, 5^{n+1} + 3) = \text{PGCD}(2u_n, 2u_{n+1}) = 2\text{PGCD}(u_n, u_{n+1}) = 2d_n.$$

On déduit alors de la question 3 que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{PGCD}(u_n, u_{n+1}) = 4}$.