

Devoir à la maison n°4

À rendre le mercredi 10 février 2016

Exercice 1. — Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $a_n = n(n+2)$, $b_n = 3n+1$ et $d_n = \text{PGCD}(a_n, b_n)$.

1. Justifier que n et $3n+1$ sont premiers entre eux.
2. On pose $\delta_n = \text{PGCD}(n+2, 3n+1)$.
 - a. Démontrer que $\delta_n \in \{1, 5\}$.
 - b. Démontrer que $\delta_n = 5$ si et seulement si $n \equiv 3 \pmod{5}$.
3. En déduire la valeur de d_n en fonction du reste de n modulo 5.

Exercice 2. — Soit $a \in \mathbb{N}^*$ un entier pair et premier avec 3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 5u_n - 6$. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est un entier non nul et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = \text{PGCD}(u_n, u_{n+1})$.

1. On suppose dans cette question uniquement que $a = 8$. Calculer d_0 , d_1 et d_2 .
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n \in \{1, 2, 3, 6\}$.
3. Démontrer que la suite (d_n) est constante puis déterminer la valeur de cette constante.
4. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2u_n = (2a-3)5^n + 3$.
5. Déduire des questions précédentes la valeur du P.G.C.D. des deux nombres $5^n + 3$ et $5^{n+1} + 3$.

Devoir à la maison n°4

À rendre le mercredi 10 février 2016

Exercice 1. — Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $a_n = n(n+2)$, $b_n = 3n+1$ et $d_n = \text{PGCD}(a_n, b_n)$.

1. Justifier que n et $3n+1$ sont premiers entre eux.
2. On pose $\delta_n = \text{PGCD}(n+2, 3n+1)$.
 - a. Démontrer que $\delta_n \in \{1, 5\}$.
 - b. Démontrer que $\delta_n = 5$ si et seulement si $n \equiv 3 \pmod{5}$.
3. En déduire la valeur de d_n en fonction du reste de n modulo 5.

Exercice 2. — Soit $a \in \mathbb{N}^*$ un entier pair et premier avec 3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 5u_n - 6$. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est un entier non nul et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = \text{PGCD}(u_n, u_{n+1})$.

1. On suppose dans cette question uniquement que $a = 8$. Calculer d_0 , d_1 et d_2 .
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n \in \{1, 2, 3, 6\}$.
3. Démontrer que la suite (d_n) est constante puis déterminer la valeur de cette constante.
4. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2u_n = (2a-3)5^n + 3$.
5. Déduire des questions précédentes la valeur du P.G.C.D. des deux nombres $5^n + 3$ et $5^{n+1} + 3$.