Corrigé du devoir à la maison n°3

1. Un réel est un entier de Gauss si et seulement si $\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{Z}$ i.e. si et seulement si $z \in \mathbb{Z}$.

2. Écrivons z et z' sous forme algébrique : $z = a + \mathrm{i}\, b$ et $z' = a' + \mathrm{i}\, b'$. Alors, comme on l'a vu en cours, $z + z' = (a + a') + \mathrm{i}\,(b + b')$, $z - z' = (a - a') + \mathrm{i}\,(b - b')$ et $zz' = (aa' - bb') + \mathrm{i}\,(ab' + a'b)$. Comme a et b sont des entiers, $a + a'$, $b + b'$, $a - a'$, $b - b'$, $aa' - bb'$ et $ab' + a'b$ sont des entiers. Ainsi, $z + z'$, $z - z'$ et zz' sont des entiers de Gauss.

3. Par définition $z = 1$ et $z' = 2$ sont des entiers de Gauss mais $\dfrac{z}{z'}$ n'est pas un entier de Gauss puisque $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. Ainsi, l'affirmation est fausse.

4. **a.** Soit z et z' deux complexes. Alors,

$$N(z)N(z') = (z\overline{z})\left(z'\overline{z'}\right) = (zz')\left(\overline{z}\,\overline{z'}\right) = (zz')\,\overline{(zz')} = N(zz').$$

b. Soit $z \in \mathbb{C}$ un entier de Gauss. Écrivons z sous forme algébrique $z = a + \mathrm{i}\, b$. Alors, comme vu en cours, $N(z) = z\overline{z} = a^2 + b^2$ donc, comme a et b sont des entiers, $N(z) \in \mathbb{Z}$.

c. Supposons que $\dfrac{1}{z}$ est un entier de Gauss. Alors, grâce à la question **4.a.**,

$$N(z)N\left(\frac{1}{z}\right) = N\left(z \times \frac{1}{z}\right) = N(1) = 1.$$

Or, par la question **4.b.**, $N(z)$ et $N\left(\frac{1}{z}\right)$ sont des entiers donc $N(z)$ est un diviseur de 1 i.e. $N(z) = 1$ ou $N(z) = -1$. De plus, toujours par la question **4.b.**, on a $N(z) = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 \geqslant 0$ donc $N(z) = 1$.

d. Soit z un entier de Gauss écrit sous forme algébrique $z = a + \mathrm{i}\, b$. Supposons que $\dfrac{1}{z}$ est également un entier de Gauss. D'après les questions **4.b.** et **4.c.**, $a^2 + b^2 = 1$ donc, comme a et b sont des entiers, $(a\,;b)$ est l'un des couples suivants : $(1\,;0)$, $(-1\,;0)$, $(0\,;1)$ ou $(0\,;-1)$. Ainsi, $z \in \{1\,;-1\,;\mathrm{i}\,;-\mathrm{i}\}$.

Réciproquement, si $z = 1$ alors $\dfrac{1}{z} = 1$, si $z = -1$ alors $\dfrac{1}{z} = -1$, si $z = \mathrm{i}$ alors $\dfrac{1}{z} = -\mathrm{i}$ et si $z = -\mathrm{i}$ alors $\dfrac{1}{z} = \mathrm{i}$ donc, dans tous les cas, $\dfrac{1}{z}$ est un entier de Gauss. On conclut que l'ensemble des entiers de Gauss z tels que $\dfrac{1}{z}$ est un entier de Gauss est $\{1\,;-1\,;\mathrm{i}\,;-\mathrm{i}\}$.

5. Soit z un entier de Gauss. Écrivons z sous forme algébrique $z = a + \mathrm{i}\, b$ avec a et b entier. Alors, comme on l'a vu précédemment, $N(z) = a^2 + b^2$. Si $N(z) = 4k - 1$ alors $N(z) \equiv -1\ [4]$ i.e. $a^2 + b^2 \equiv 3\ [4]$.

Montrons que cela n'est pas possible. En effet, si n est un entier, le tableau suivant donne les restes possibles modulo 4 pour n^2 :

Reste de n modulo 4	0	1	2	3
Reste de n^2 modulo 4	0	1	0	1

Ainsi, le reste du carré d'un entier modulo 4 est soit 0 soit 1. On en déduit que le reste $a^2 + b^2$ est soit $0 + 0 = 0$, soit $0 + 1 = 1 + 0 = 1$, soit $1 + 1 = 2$. Ainsi, ce reste n'est jamais 3 donc $a^2 + b^2 \not\equiv 3\ [4]$.

On conclut que l'ensemble des entiers de Gauss z tels que $N(z) = 4k - 1$ est $\varnothing$.