Devoir à la maison n°3

À rendre le lundi 02 novembre 2020

On dit qu'un nombre complexe z est un entier de Gauss s'il existe deux entiers a et b tels que $z = a + \mathrm{i}b$. Autrement dit, un nombre complexe z est un entier de Gauss si et seulement si $\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{Z}$ et $\mathrm{Im}(z) \in \mathbb{Z}$.

1. À quelle condition un réel est-il un entier de Gauss ?

2. Soit z et z' deux entiers de Gauss. Montrer que $z + z'$, $z - z'$ et zz' sont des entiers de Gauss.

3. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse : « pour tous entiers de Gauss z et z' tels que $z' \neq 0$, $\dfrac{z}{z'}$ est un entier de Gauss » ?

4. Pour tout nombre complexe z, on pose $N(z) = z\overline{z}$.

- **a.** Démontrer que, pour tous complexes z et z', $N(z)N(z') = N(zz')$.
- **b.** Démontrer que, pour tout entier de Gauss z, $N(z) \in \mathbb{Z}$.
- **c.** Soit z un entier de Gauss. Déduire des questions précédentes que si $\dfrac{1}{z}$ est un entier de Gauss alors $N(z) = 1$.
- **d.** Déterminer l'ensemble des entiers de Gauss tels que $\dfrac{1}{z}$ est un entier de Gauss.

5. (Facultatif) Soit k un entier strictement positif. Déterminer l'ensemble des entiers de Gauss z tels que $N(z) = 4k - 1$.

Terminale générale – Mathématiques expertes octobre 2020

Devoir à la maison n°3

À rendre le lundi 02 novembre 2020

On dit qu'un nombre complexe z est un entier de Gauss s'il existe deux entiers a et b tels que $z = a + \mathrm{i}b$. Autrement dit, un nombre complexe z est un entier de Gauss si et seulement si $\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{Z}$ et $\mathrm{Im}(z) \in \mathbb{Z}$.

1. À quelle condition un réel est-il un entier de Gauss ?

2. Soit z et z' deux entiers de Gauss. Montrer que $z + z'$, $z - z'$ et zz' sont des entiers de Gauss.

3. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse : « pour tous entiers de Gauss z et z' tels que $z' \neq 0$, $\dfrac{z}{z'}$ est un entier de Gauss » ?

4. Pour tout nombre complexe z, on pose $N(z) = z\overline{z}$.

- **a.** Démontrer que, pour tous complexes z et z', $N(z)N(z') = N(zz')$.
- **b.** Démontrer que, pour tout entier de Gauss z, $N(z) \in \mathbb{Z}$.
- **c.** Soit z un entier de Gauss. Déduire des questions précédentes que si $\dfrac{1}{z}$ est un entier de Gauss alors $N(z) = 1$.
- **d.** Déterminer l'ensemble des entiers de Gauss tels que $\dfrac{1}{z}$ est un entier de Gauss.

5. (Facultatif) Soit k un entier strictement positif. Déterminer l'ensemble des entiers de Gauss z tels que $N(z) = 4k - 1$.