Devoir à la maison n°3 – À rendre le mardi 7 janvier 2020

Matrices orthogonales d'ordre 2

Dans toute la suite, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\right)$.

On rappelle que si $\vec{u}$ est un vecteur de coordonnées $(x\,;y)$, la norme du vecteur $\vec{u}$ est

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Si $\vec{u}$ est un vecteur de coordonnées $(x\,;y)$, on note $M_{\vec{u}}$ la matrice colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Si A est une matrice carrée d'ordre 2, si $\vec{u}$ est un vecteur du plan et si $A \times M_{\vec{u}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on note $A(\vec{u})$ le vecteur du plan de coordonnées $(x'\,;y')$.

Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\,(2\,;-1)$ alors $M_{\vec{u}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $A \times M_{\vec{u}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ et ainsi $A(\vec{u})$ est le vecteur de coordonnées $(4\,;6)$.

On dit qu'une matrice carrée A d'ordre 2 est orthogonale si, pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, $\|A(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$. Ainsi, une matrice orthogonale est une matrice qui conserve la norme des vecteurs.

Dans toute la suite, lorsqu'on dit qu'une matrice est orthogonale, il est sous-entendu qu'il s'agit d'une matrice carrée d'ordre 2.

Partie A – Exemples de matrices orthogonales

1. Donner un exemple simple de matrice orthogonale.

2. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est orthogonale.

3. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \frac{1}{\sqrt{2}}B$.

a. Soit $\vec{u}\,(1\,;0)$. Déterminer les coordonnées de $B(\vec{u})$. La matrice B est-elle orthogonale ?

b. Soit x et y deux réels et $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(x\,;y)$.
Déterminer les coordonnées de $C(\vec{u})$ et en déduire que C est orthogonale.

Partie B – Déterminant et inverse d'une matrice orthogonale

Dans toute cette partie, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale.

1. Démontrer que, pour tout $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$,

$$a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 + c^2x^2 + 2cdxy + d^2y^2 = x^2 + y^2.$$

2. En utilisant l'égalité précédente successivement avec $(x\,;y) = (1\,;0)$, $(x\,;y) = (0\,;1)$ et $(x\,;y) = (1\,;1)$, montrer que

$$a^2 + c^2 = 1 \qquad b^2 + d^2 = 1 \qquad ab + cd = 0.$$

3. Justifier que $a^2b^2 = c^2d^2$ et en déduire que $a^2 + b^2 = 1$.

4. Calculer $(ad - bc)^2$ et en déduire que $\det A = 1$ ou $\det A = -1$.

5. **a.** Justifier que A est inversible.

b. Montrer que $c^2 + d^2 = 1$.

c. Montrer que $a^2 = d^2$ et que $b^2 = c^2$.

d. Montrer que $(ac + bd)^2 = a^2(c^2 - b^2) + b^2(d^2 - a^2)$ et en déduire la valeur de $ac + bd$.

e. Déduire des questions précédentes que $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Partie C – Réciproques (facultatif)

Dans toute cette partie, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ désigne une matrice carrée d'ordre 2.

1. On a vu dans la **Partie B** que si A est orthogonale alors $\det A = 1$ ou $\det A = -1$.
La réciproque de cette implication est-elle vraie ?

2. On a vu dans la **Partie B** que si A est orthogonale alors A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.
La réciproque de cette implication est-elle vraie ?

Partie D – Liens avec le produit scalaire (facultatif)

1. Montrer qu'une matrice carrée A d'ordre 2 est orthogonale si et seulement si A conserve le produit scalaire i.e. si et seulement si, pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $A(\vec{u}) \cdot A(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$.

2. Est-il vrai qu'une matrice carrée A d'ordre 2 est orthogonale si et seulement si elle conserve l'orthogonalité i.e. si et seulement si, pour tous vecteurs orthogonaux $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $A(\vec{u})$ et $A(\vec{v})$ sont orthogonaux ?